# 3

# NAJDÔLEŽITEJŠIE VYRIEŠENÉ MATEMATICKÉ PROBLÉMY

*Jaroslav Šupina, Miroslav Repický*

Výsledky seminára boli priebežne publikované vo vedeckých časopisoch. Úplný zoznam vedeckých prác profesora Bukovského nájde čitateľ v publikácii (Štefan Tkačik, 2021). V nasledujúcom texte uvádzame výsledky ostatných členov seminára dosiahnuté v seminári. Tieto práce sú rozdelené do niekoľkých skupín podľa svojho hlavného zamerania.

**Kombinatorická topológia.** $\beta\omega$ je topologický priestor na množine všetkých ultrafiltrov na $\omega$ ($\omega$ je množina prirodzených čísel). Báza otvorených množín tohto topologického priestoru pozostáva z množín $[a] = \{p \in \beta\omega : a \in p\}$ pre $a \subseteq \omega$. Každá funkcia $f : \omega \to \omega$ má jediné spojité predĺženie $\bar{f} : \beta\omega \to \beta\omega$, kde $\bar{f}(p) = \{a \subseteq \omega : f^{-1}[a] \in p\}$. Dva ultrafiltre $p$ a $q$ majú rovnaký typ, ak existuje bijekcia $f : \omega \to \omega$ taká, že $q = \bar{f}(p)$. V $\beta\omega$ je niekoľko čiastočných usporiadaní, ktoré sú invariantné vzhľadom na typ: $p \leq_{\mathrm{RF}} q$ (Rudin-Frolík), ak existuje diskrétna postupnosť ultrafiltrov $\{q_n : n \in \omega\}$ taká, že $q = \sum^{p}_{n\in\omega} q_n = \{a \subseteq \omega : \{n \in \omega : a \in q_n\} \in p\}$; $p \leq_{\mathrm{RK}} q$ (Rudin-Keisler), ak existuje funkcia $f : \omega \to \omega$ taká, že $p = \bar{f}(q)$; $p \leq_{\mathrm{RB}} q$ (Rudin-Blass), ak existuje funkcia $f : \omega \to \omega$ taká, že $p = \bar{f}(q)$ a $f^{-1}[\{n\}]$ je konečná pre každé $n \in \omega$. Nie je ťažké overiť, že $p \leq_{\mathrm{RF}} q \Rightarrow p \leq_{\mathrm{RK}} q$ a $p \leq_{\mathrm{RB}} q \Rightarrow p \leq_{\mathrm{RK}} q$. Uniformný ultrafilter $p$ je $P$-bod v $\beta\omega$ (t.j. $P$-ultrafilter), ak prienik každého spočítateľného systému okolí bodu $p$ má neprázdne vnútro (t. j. pre každú postupnosť množín $a_n \in p$, $n \in \omega$ existuje množina $a \in p$ taká, že $a - a_n$ je konečná pre všetky $n \in \omega$). Ultrafilter $p$ je $Q$-bod, ak každý rozklad $\omega$ na konečné množiny má selektor, ktorý je v $p$. Ultrafilter je selektívny, ak je zároveň $P$-bod a $Q$-bod. Každý $P$-ultrafilter je $\leq_{RF}$-minimálny, každý selektívny ultrafilter je $\leq_{RK}$-minimálny a každý $Q$-ultrafilter je $\leq_{RB}$-minimálny. Existencia ultrafiltrov s týmito vlastnosťami sa v ZFC nedá dokázať ani vyvrátiť.


1. B. Balcar, P. Simon, and P. Vojtáš, *Refinement and properties and extending of filters.* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 28 (1980), no. 11-12, 535–540 (1981).
2. M. Gavalec and P. Vojtáš, *Remarks to a modification of Ramsey-type theorems.* Comment. Math. Univ. Carolin. 21 (1980), no. 4, 727–738.
3. B. Balcar and P. Vojtáš, *Almost disjoint refinement of families of subsets of* $\boldsymbol{N}$. Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1980), no. 3, 465–470.
4. B. Balcar, P. Simon, and P. Vojtáš, *Refinement properties and extensions of filters in Boolean algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981), no. 1, 265–283.
5. L. Bukovský and E. Butkovičová. *Ultrafilter with* $\aleph_0$ *predecessors in Rudin-Frolík order.* Comment. Math. Univ. Carolin. 22 (1981), no. 3, 429–447.
6. L. Bukovský and E. Copláková, *Rapid ultrafilter need not be Q-point.* Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 1982, Suppl. No. 2, 15–20.
7. E. Butkovičová, *Ultrafilters without immediate predecessors in Rudin--Frolík order.* Comment. Math. Univ. Carolin. 23 (1982), no. 4, 757–766.
8. P. Vojtáš, *Simultaneous strategies and Boolean games of uncountable length.* Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 1982, Suppl. No. 2, 293–297.
9. P. Vojtáš, *Game properties of Boolean algebras.* Comment. Math. Univ. Carolin. 24 (1983), no. 2, 349–369.
10. P. Vojtáš, *A transfinite Boolean game and a generalization of Kripke's embedding theorem.* General topology and its relations to modern analysis and algebra, V (Prague, 1981), 657–662, Sigma Ser. Pure Math., 3, Heldermann, Berlin, 1983.
11. E. Butkovičová, *Long chains in Rudin-Frolík order.* Comment. Math. Univ. Carolin. 24 (1983), no. 3, 563–570.
12. E. Butkovičová, *Gaps in Rudin-Frolík order.* General topology and its relations to modern analysis and algebra, V (Prague, 1981), 56–58, Sigma Ser. Pure Math., 3, Heldermann, Berlin, 1983.

13. P. Vojtáš, *Boolean games-classifying strategies and omitting cardinality assumptions.* Proceedings of the 11th winter school on abstract analysis (Železná Ruda, 1983). Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 1984, Suppl. No. 3, 361–368.

14. E. Butkovičová, *Subsets of $\beta\mathbf{N}$ without an infimum in Rudin-Frolík order.* Proceedings of the 11th winter school on abstract analysis (Železná Ruda, 1983). Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 1984, Suppl. No. 3, 75–80.

15. E. Butkovičová, *Short branches in the Rudin-Frolík order.* Comment. Math. Univ. Carolin. 26 (1985), no. 3, 631–635.

16. E. Copláková and P. Vojtáš, *A new sufficient condition for the existence of Q-points in $\beta\omega - \omega$.* Topology, theory and applications (Eger, 1983), 199–208, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 41, North-Holland, Amsterdam, 1985.

17. P. Vojtáš, *Cardinalities of noncentered system of subsets of $\omega$ which reflect some qualities of ultrafilters, p-points and rapid filters.* Baku International Topological Conference (Russian) (Baku, 1987), 263–268, "Èlm", Baku, 1989.

18. E. Butkovičová, *Decreasing chains without lower bounds in the Rudin--Frolík order.* Proc. Amer. Math. Soc. 109 (1990), no. 1, 251–259.

19. E. Butkovičová, *A remark on incomparable ultrafilters in the Rudin-Keisler order.* Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), no. 2, 577–578.

20. W. Just and P. Vojtáš, *On matrix rapid filters.* European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (Haifa, 1995). Fund. Math. 154 (1997), no. 2, 177–182.

21. S. Krajči and P. Vojtáš, *On the Boolean structure generated by Q-points of $\omega$.* 23rd Winter School on Abstract Analysis (Lhota nad Rohanovem, 1995; Poděbrady, 1995). Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 36 (1995), no. 2, 33–38.

22. S. Fuchino, H. Mildenberger, S. Shelah, and P. Vojtáš, *On absolutely divergent series.* Fund. Math. 160 (1999), no. 3, 255–268.

**Axiómy teórie množín, modely teórie množín, a forcing.** Axióma výberu (AC): Pre každú množinu $X$ existuje funkcia $f$ taká, že $f(x) \in x$ pre každú neprázdnu množinu $x \in X$. ZFC označuje axiomatický systém Zermela a Fraenkla s AC a ZF označuje rovnaký systém bez AC. Pod modelom teórie množín rozumieme tranzitívnu triedu obsahujúcu všetky ordinálne čísla, ktorá spĺňa axiómy ZF prípadne ZFC. Ak $M \subseteq$

$N$ sú dva takéto modely, hovoríme o rozšírení modelov. Univerzum všetkých množín $V$ a trieda konštruktívnych množín $L$ sú príkladmi takýchto modelov (vnútorné modely). Booleovské modely a forcing umožňujú uvažovať o rozšíreniach, ktoré nie sú vnútornými modelmi.

1. M. Repický, *Properties of measure and category in generalized Cohen's and Silver's forcing.* Acta Universitatis Carolinae, Mathematica et Physica 28 (1987), no. 2, 101–115.
2. M. Repický, *Collapsing of cardinals in generalized Cohen's forcing.* Acta Universitatis Carolinae, Mathematica et Physica 29 (1988), no. 2, 67–74.
3. L. Spišiak and P. Vojtáš, *Dependences between definitions of finiteness.* Czechoslovak Math. J. 38(113) (1988), no. 3, 389–397.
4. L. Bukovský and E. Copláková-Hartová. *Minimal collapsing extensions of models of ZFC.* Ann. Pure Appl. Logic 46 (1990), no. 3, 265–298.
5. M. Repický, *Properties of forcing preserved by finite support iterations.* Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 32 (1991), no. 1, 95–103.
6. L. Spišiak, *Dependences between definitions of finiteness.* II. Czechoslovak Math. J. 43(118) (1993), no. 3, 391–407.
7. L. Bukovský and J. Skřivánek, *The smallest common extension of a sequence of models of ZFC.* Comment. Math. Univ. Carolin. 35 (1994), no. 4, 745–752.
8. M. Repický, *Goldstern-Judah-Shelah preservation theorem for countable support iterations.* Fundamenta Mathematicae 144 (1994), no. 1, 55–72.
9. H. Judah and M. Repický, *No random reals in countable support iterations.* Israel Journal of Mathematics 92 (1995), 349–359.
10. M. Repický, *Good sequences for Sacks forcing.* Tatra Mountains Mathematical Publications, 30 (2005), 101–122.
11. M. Repický, *A proof of the independence of the Axiom of Choice from the Boolean Prime Ideal Theorem.* Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 56 (2015), issue 4, pp. 543–546.

**Konvergencia, pojmy spojitosti.** Topologický priestor $X$ sa nazýva sekvenciálny priestor, ak každá množina $A \subseteq X$ je uzavretá práve vtedy, keď $A$ obsahuje limity všetkých konvergentných postupností prvkov z $A$. Priestor $X$ sa nazýva Fréchetov priestor, ak pre každé $x \in \overline{A}$ existuje postupnosť $x_0, x_1,$

... prvkov $A$ konvergujúca k $x$. Funkcia $f : X \to \mathbb{R}$ je kvázispojitá v bode $x$, ak pre každé okolie $U$ bodu $x$ a pre každé $\varepsilon > 0$ existuje otvorená množina $G \subseteq U$ taká, že $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pre každé $y \in G$. Funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je symetricky spojitá v bode $x$, ak $\lim_{h \to 0}(f(x+h) - f(x-h)) = 0$.


1. R. Frič and M. Gavalec, *On the Novák completion of convergence groups.* Comment. Math. Univ. Carolin. 24 (1983), no. 2, 341–347.
2. R. Frič and P. Vojtáš, *The space $^{\omega}\omega$ in sequential convergence.* Convergence structures 1984 (Bechyně, 1984), 95–106, Math. Res., 24, Akademie--Verlag, Berlin, 1985.
3. R. Frič and P. Vojtáš, *Diagonal conditions in sequential convergence.* Convergence structures 1984 (Bechyně, 1984), 77–94, Math. Res., 24, Akademie-Verlag, Berlin, 1985.
4. R. Frič and P. Vojtáš, *Convergent sequences in $\beta X$.* Proceedings of the 11th winter school on abstract analysis (Železná Ruda, 1983). Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 1984, Suppl. No. 3, 133–137.
5. J. Borsík, J. Doboš, and M. Repický, *Sums of quasicontinuous functions with closed graphs.* Real Analysis Exchange 25 (1999/2000), no. 2, 679–690.
6. M. Repický, *Generalized Egoroff's theorem.* Tatra Mountains Mathematical Publications, 44 (2009), 81–96.
7. M. Repický, *Sets of points of symmetric continuity.* Archive for Mathematical Logic 54 (2015), issue 7, 803–824.
8. M. Repický, *Ideal generalizations of Egoroff's theorem.* Archive for Mathematical Logic 59 (2020), 957–977,
9. P. Eliaš, *On the convergence of a series mapped by a function.* Math. Slovaca 65 (2015), no. 1, 63–78.


**Sumačné metódy radov.** Testy konvergencie a divergencie radov, štruktúry založené na porovnaní testov konvergencie a na porovnaní testov divergencie radov, a súvisiace kardinálne invarianty.


1. P. Vojtáš, *Set-theoretic characteristics of summability of sequences and convergence of series.* Comment. Math. Univ. Carolin. 28 (1987), no. 1, 173–183.
2. P. Vojtáš, *The strength of the comparison test versus gaps between convergent and divergent series.* General topology and its relations to modern analysis and algebra, VI (Prague, 1986), 617–622, Res. Exp. Math., 16, Heldermann, Berlin, 1988.

3. P. Vojtáš, *More on set-theoretic characteristics of summability of sequences by regular (Toeplitz) matrices.* Comment. Math. Univ. Carolin. 29 (1988), no. 1, 97–102.

4. P. Vojtáš, *A note on the effectiveness of tests for the absolute convergence and divergence of infinite series.* Math. Slovaca 42 (1992), no. 1, 97–101.

5. P. Vojtáš, *Boolean isomorphism between partial orderings of convergent and divergent series and infinite subsets of* $\boldsymbol{N}$. Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993), no. 1, 235–242.

6. P. Vojtáš, *On* $\omega^*$ *and absolutely divergent series.* Topology Proc. 19 (1994), 335–348.

7. P. Vojtáš, *Series and Toeplitz matrices (a global implicit approach).* Real functions (Liptovský Ján, 1996). Tatra Mt. Math. Publ. 14 (1998), 269–281.

**Deskriptívna teória množín.** Systém borelovských množín v poľskom priestore je najmenší systém množín, ktorý obsahuje všetky otvorené množiny, s každou množinou obsahuje aj jej komplement a je uzavretý na spočítateľné zjednotenia množín. Postupnými aplikáciami (spojitých) projekcií a operácie komplementu na systém borelovských množín vzniknú systémy projektívnych množín $\Sigma^1_n$ a $\Pi^1_n$ ($n \geq 1$). Projektívne množiny v určitých axiomatických systémoch teórie množín môžu mať niektoré pekné vlastnosti borelovských množín, ale bez špeciálnych axiomatických predpokladov to platí len pre množiny najnižších tried projektívnej zložitosti. Napríklad, každá $\Sigma^1_1$ množina má Baireovú vlastnosť, je merateľná vzhľadom na každú $\sigma$-konečnú borelovskú mieru a ak je nespočítateľná, tak má perfektnú podmnožinu.

1. L. Bukovský and E. Butkovičová, *A universal function for continuous functions.* Proceedings of the 11th winter school on abstract analysis (Železná Ruda, 1983). Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 1984, Suppl. No. 3, 71–74.

2. M. Staš, *Hurewicz scheme.* Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 49 (2008), no. 2, 75–78.

3. M. Staš, *Application of Hurewicz theorem to classification of* $\Pi^1_1$*-complete sets.* Tatra Mt. Math. Publ. 46 (2010), 65–69.

4. M. Staš, *The regularity properties on the real line.* Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 51 (2010), suppl., 73–82.

5. M. Repický, *Another proof of Hurewicz theorem.* Tatra Mountains Mathematical Publications 49 (2011), 1–7.

6. P. Eliaš, *A Galois connection related to restrictions of continuous real functions.* Topology Appl. 265 (2019), 106814, 14 pp.

7. J. Šupina and D. Uhrik, *On a Lindenbaum composition theorem.* Tatra Mt. Math. Publ. 74 (2019), 145–158.

**Ideály na reálnych číslach a kategoriálne bázy.** Medzi Lebesgueovou merateľnosťou a Baireovou vlastnosťou sú určité podobnosti. Známe sú dva spôsoby ako tieto dva pojmy regulárnosti množín vyjadriť nejakým spoločným prístupom. Autorom jedného z nich je D. H. Fremlin. Druhým omnoho jednoduchším prístupom ale aj všeobecnejším sú kategoriálne bázy podľa J. C. Morgana, II. Kategoriálna báza na množine $X$ je systém oblastí $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ s určitými pomerne jednoduchými vlastnosťami, ktoré kontrolujú možnosti vytvárania disjunktných podsystémov systému $\mathcal{C}$ malých mohutností. Množina $A \subseteq X$ sa nazýva $\mathcal{C}$-riedka, ak každá oblasť $C \in \mathcal{C}$ má podoblasť $D \subseteq C$ takú, že $D \cap A = \emptyset$. Množina $A$ je $\mathcal{C}$-meager, ak je spočítateľným zjednotením $\mathcal{C}$-riedkych množín. Množina $A$ má $\mathcal{C}$-Baireovu vlastnosť, ak každá oblasť $C \in \mathcal{C}$ má podoblasť $D \subseteq C$ takú, že buď $D \cap A$ je $\mathcal{C}$-meager alebo $D \setminus A$ je $\mathcal{C}$-meager. Mnoho $\sigma$-ideálov je možné popísať ako systém $\mathcal{C}$-meager množín a niektoré dokonca ako systém $\mathcal{C}$-rare množín. Dôležitou vlastnosťou kategoriálnych báz je, že systém množín s $\mathcal{C}$-Baireovou vlastnosťou je uzavretý na Suslinovu operáciu $\mathcal{A}$. Preto ak všetky otvorené množiny majú $\mathcal{C}$-Baireovu vlastnosť, tak aj všetky analytické množiny ju majú.

1. M. Goldstern, M. Repický, S. Shelah, and O. Spinas, *On tree ideals*, Proceedings of the American Mathematical Society 123 (1995), no. 5, 1573–1581.

2. G. Labdzki and M. Repický, *Hechler reals.* The Journal of Symbolic Logic 60 (1995), no. 2, 444–458.

3. H. Judah and M. Repický, *Amoeba reals.* The Journal of Symbolic Logic 60 (1995), no. 4, 1168–1185.

4. M. Repický, *Cohen real and disjoint refinement of perfect sets.* Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 41 (2000), no. 1, 179–181.

5. M. Repický, *Mycielski ideal and the perfect set theorem.* Proceedings of the American Mathematical Society 132 (2004) no. 7, 2141–2150.

6. M. Repický, *Bases of measurability in Boolean algebras.* Mathematica Slovaca, 64 (2014), no. 6, 1299–1334.

7. M. Dečo and M. Repický, *Strongly dominating sets of reals.* Archive for Mathematical Logic 52 (2013), issue 7, 827–846.

8. M. Dečo, *Strongly unbounded and strongly dominating sets of reals generalized.* Arch. Math. Logic 54 (2015), no. 7-8, 825–838.

9. M. Repický, *Cofinality of the Laver ideal.* Archive for Mathematical Logic 55 (2016), issue 7-8, 1025–1036.

**Kardinálne invarianty.** Pod binárnou reláciou rozumieme trojicu $(R_-, R_+, R)$ takú, že $R \subseteq R_- \times R_+$; alebo jednoducho $R$, ak $R_-$ a $R_+$ sú z kontextu zrejmé. Pre reláciu $R$ definujeme tieto dva invarianty:

$$\mathfrak{d}(R) = \min\{|D| : D \subseteq R_+ \text{ a } (\forall x \in R_-)(\exists y \in D)\ x\ R\ y\},$$
$$\mathfrak{b}(R) = \min\{|B| : B \subseteq R_- \text{ a } (\forall y \in R_+)(\exists x \in B)\ \neg(x\ R\ y)\}.$$

Píšeme $R \preceq S$ ak existuje morfizmus z relácie $R$ k relácii $S$, čo predstavuje dvojicu zobrazení $\Phi : S_- \to R_-$ a $\Psi : R_+ \to S_+$ takú, že $\Phi(x)\ R\ y \Rightarrow x\ S\ \Psi(y)$. Dôsledkom existencie morfizmu $(\Phi, \Psi)$ sú tieto nerovnosti medzi kardinálnymi invariantami $\mathfrak{b}(R) \leq \mathfrak{b}(S)$ a $\mathfrak{d}(S) \leq \mathfrak{d}(R)$. Niekedy nerovnosti medzi kardinálnymi invariantami rôznych štruktúr je možné vyjadriť morfizmami tohto typu. Patria k nim napríklad nerovnosti tzv. Cichońovho diagramu pre kardinálne invarianty Lebesgueovej miery a Baireovej kategórie.

1. M. Repický, *Porous sets and additivity of Lebesgue measure.* Real Analysis Exchange 15 (1989/90), no. 1, 282–298.

2. M. Repický, *Additivity of porous sets.* Real Analysis Exchange 16 (1990/91), no. 1, 340–343.

3. M. Repický, *An example which discerns porosity and symmetric porosity.* Real Analysis Exchange 17 (1991/92), no. 1, 416–420.

4. P. Vojtáš, *Cardinalities of noncentered systems of subsets of $\omega$.* Topological, algebraical and combinatorial structures. Frolík's memorial volume. Discrete Math. 108 (1992), no. 1-3, 125–129.

5. P. Vojtáš, *Topological cardinal invariants and the Galois-Tukey category.* Recent developments of general topology and its applications (Berlin, 1992), 309–314, Math. Res., 67, Akademie-Verlag, Berlin, 1992.

6. P. Vojtáš, *Generalized Galois-Tukey-connections between explicit relations on classical objects of real analysis.* Set theory of the reals (Ramat Gan, 1991), 619–643, Israel Math. Conf. Proc., 6, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1993.

7. M. Repický, *Cardinal invariants related to porous sets.* Set theory of the reals (Ramat Gan, 1991), 433–438, Israel Mathematical Conference Proceedings 6, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1993.

8. P. Vojtáš, *Amoeba relation and Galois-Tukey connections.* Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 35 (1994), no. 2, 67–74.

9. M. Repický, *Perfect sets and collapsing continuum.* Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 44 (2003), no. 2, 315–327.

10. M. Repický, *Cardinal invariants and the collapse of the continuum by Sacks forcing.* The Journal of Symbolic Logic 73 (2008), no. 2, 711–727.

11. M. Repický, *Rosenthal families, filters, and semifilters.* Archive for Mathematical Logic 61 (2022), 131–153.

12. J. Šupina, *Pseudointersection numbers, ideal slaloms, topological spaces, and cardinal inequalities.* Arch. Math. Logic 62 (2023), 87-112.

**Trigonometrické tenké množiny.** Symbolom $S(x)$ označme trigonometrický rad $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx)$ a $b_0 = 0$. Nech $A \subseteq [0,1]$. Množina $A$ je $U$-množina (set of uniqueness), ak každý trigonometrický rad $S(x)$ konvergujúci k 0 mimo množiny $A$ je identicky rovný nule. $A$ je $R$-množina, ak existuje rad $S(x)$ konvergujúci na $A$ taký, že číselná postupnosť $\{|a_n| + |b_n|\}_{n=0}^{\infty}$ nekonverguje k 0. $A$ je $N$-množina, ak existuje rad $S(x)$ absolútne konvergentný na $A$ a $\sum_{n=0}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) = \infty$. $A$ je $N_0$-množina, ak existuje rastúca postupnosť prirodzených čísel $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ taká, že rad $\sum_{k=0}^{\infty} \sin \pi n_k x$ absolútne konverguje na $A$. $A$ je $A$-množina, ak existuje rastúca postupnosť prirodzených čísel $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ taká, že $\lim_{k\to\infty} \sin \pi n_k x = 0$ pre každé $x \in A$. Ak v definícii $A$-množiny vymeníme bodovú konvergenciu za rovnomernú alebo kvázinormálnu, dostaneme definíciu Dirichletovej a pseudo-Dirichletovej množiny. Písmenami $\mathcal{U}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_0$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, $p\mathcal{D}$ označujeme systémy množín príslušného typu. Každý z týchto systémov $\mathcal{F}$ je uzavretý na podmnožiny ale nie je ideálom. Preto sa skúmajú ideály prípustných (permitted) množín $\mathrm{Prm}(\mathcal{F}) = \{A \subseteq [0,1] : (\forall B \in \mathcal{F})\ A \cup B \in \mathcal{F}\}$.

1. L. Bukovský, N. N. Kholshchevnikova, and M. Repický, *Thin sets of harmonic analysis and infinite combinatorics.* Real Analysis Exchange 20 (1994/95), no. 2, 454–509.
2. M. Repický, *A family of permitted trigonometric thin sets.* Proceedings of the American Mathematical Society 125 (1997), no. 1, 137–144.
3. M. Repický, *Towers and permitted trigonometric thin sets.* Real Analysis Exchange 21 (1995/96), no. 2, 648–655.
4. M. Repický, *Permitted trigonometric thin sets and infinite combinatorics.* Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 42 (2001), no. 4, 609–627.
5. P. Eliaš, *A classification of trigonometrical thin sets and their interrelations.* Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), no. 4, 1111–1121.
6. P. Eliaš, *A hierarchy of thin sets related to the boundedness of trigonometric series.* Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), no. 11, 3341–3347.
7. P. Eliaš, *Covering for category and trigonometric thin sets.* Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 10, 3241–3249.
8. P. Eliaš, *On inclusions between Arbault sets.* Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 44 (2003), no. 2, 65–72.
9. P. Eliaš, *Arbault permitted sets are perfectly meager.* Tatra Mt. Math. Publ. 30 (2005), 135–148.
10. P. Eliaš, *Dirichlet sets, Erdos-Kunen-Mauldin theorem, and analytic subgroups of the reals.* Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), no. 6, 2093–2104.

**Fuzzy logika.** Viachodnotová logika, systémy odvodzovacích pravidiel, korektnosť a úplnosť týchto systémov odvodzovania, fuzzy logické programovanie.

1. L. Paulík, *Strictness of $\mathcal{L}_0$-ring completions.* Ordered algebraic structures '93 (Liptovský Ján, 1993). Tatra Mt. Math. Publ. 5 (1995), 169–175.
2. P. Vojtáš, *A lattice of binary relations with polarity.* Ordered algebraic structures '93 (Liptovský Ján, 1993). Tatra Mt. Math. Publ. 5 (1995), 143–150.
3. P. Vojtáš, *Boolean universe versus fuzzy sets.* Fuzzy sets '94 (Liptovský Ján, 1994). Tatra Mt. Math. Publ. 6 (1995), 179–186.
4. P. Vojtáš and L. Paulík, *Soundness and completeness of non-classical extended SLD-resolution.* Extensions of logic programming (Leipzig, 1996), 289–301, Lecture Notes in Comput. Sci., 1050, Lecture Notes in Artificial Intelligence, Springer, Berlin, 1996.

5. L. Paulík, *Best possible answer is computable for fuzzy SLD-resolution.* Gödel '96 (Brno, 1996), 257–266, Lecture Notes Logic, 6, Springer, Berlin, 1996.

6. L. Paulík, *Left continuity of t-norms and completeness of fuzzy SLD-resolution.* Fuzzy sets (Liptovský Ján, 1996). Tatra Mt. Math. Publ. 12 (1997), 51–63.

7. P. Vojtáš, *Translating Boolean sets to fuzzy sets* (*reals and their topology*). Fuzzy sets, Part I (Liptovský Ján, 1998). Tatra Mt. Math. Publ. 16 (1999), part I, 197–209.

8. P. Vojtáš, *Declarative and procedural semantics of fuzzy similarity based unification.* Kybernetika (Prague) 36 (2000), no. 6, 707–720.

**Topologické priestory nerozlišujúce konvergencie a výberové princípy.** Postupnosť funkcií $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \omega$ kvázinormálne konverguje k funkcii $f$, ak existuje postupnosť kladných čísel $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergujúca k 0 taká, že $(\forall x \in X)$ $(\forall^\infty n \in \omega)$ $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon_n$. Topologický priestor $X$ je QN-priestor, ak každá postupnosť funkcií $f_n \in C(X)$, $n \in \omega$ konvergujúca bodovo k 0 na $X$ konverguje k 0 kvázinormálne; $X$ je wQN-priestor, ak každá postupnosť funkcií $f_n \in C(X)$, $n \in \omega$ konvergujúca bodovo k 0 má podpostupnosť, ktorá konverguje kvázinormálne k 0. Tieto vlastnosti určitým spôsobom súvisia s Hurewiczovou vlastnosťou, ktorá je súčasťou klasifikácie topologických priestorov v závislosti od existencie pokrytí získaných rôznymi výberovými princípmi z ľubovoľnej postupnosti špecifických otvorených pokrytí. Je tu aj súvis s klasifikáciou priestorov založenej na možnosti výberu konvergentnej postupnosti funkcií určitým výberovým princípom z postupnosti pozostávajúcej z konvergentných postupností spojitých funkcií. Všetky tieto vlastnosti sa skúmajú aj v súvislosti s konvergenciami polospojitých funkcií aj s ideálovými zovšeobecneniami konvergencií spojitých funkcií.

1. L. Bukovský, I. Recław, and M. Repický, *Spaces not distinguishing pointwise and quasinormal convergence of real functions.* Topology and its Applications 41 (1991), no. 1-2, 25–40.

2. L. Bukovský, I. Recław, and M. Repický, *Spaces not distinguishing convergences of real-valued functions.* Topology and its Applications 112 (2001), no. 1, 13–40.

3. M. Repický, *Spaces not distinguishing convergences.* Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 41 (2000), no. 4, 829–842.

4. L. Bukovský and J. Haleš, *On Hurewicz properties.* Topology Appl. 132 (2003), no. 1, 71–79.
5. J. Haleš, *On Scheepers' conjecture.* Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 46 (2005), no. 2, 27–31.
6. L. Bukovský and J. Haleš, *QN-spaces, wQN-spaces and covering properties.* Topology Appl. 154 (2007), no. 4, 848–858.
7. J. Šupina, *wQN spaces and related notions.* Tatra Mt. Math. Publ. 46 (2010), 71–77.
8. L. Bukovský and J. Šupina, *Sequence selection principles for quasi-normal convergence.* Topology Appl. 159 (2012), 283–289.
9. J. Šupina, *On sequence selection properties.* Filomat 27 (2013), 1523–1544.
10. L. Bukovský and J. Šupina, *Modifications of sequence selection principles.* Topology Appl. 160 (2013), 2356–2370.
11. J. Šupina, *Notes on modifications of a wQN-space.* Tatra Mt. Math. Publ. 58 (2014), 129–136.
12. J. Šupina, *On Ohta-Sakai's properties of a topological space.* Topology Appl. 190 (2015), 119–134.
13. J. Šupina, *Ideal QN-spaces.* J. Math. Anal. Appl. 435 (2016), 477–491.
14. L. Bukovský, P. Das, and J. Šupina, *Ideal quasi-normal convergence and related notions.* Colloq. Math. 146 (2017), 265–281.
15. V. Šottová, *Cardinal invariant $\lambda(S, J)$.* Geyser Mathematicae Cassoviensis 1 (2019), 64–72.
16. V. Šottová and J. Šupina, *Principle $S_1(P; R)$: ideals and functions.* Topology Appl. 258 (2019), 282–304.
17. P. Das, S. Sengupta, and J. Šupina, *$I^K$-convergence of sequences of functions.* Math. Slovaca 69 (2019), 1137–1148.
18. M. Repický, *Spaces not distinguishing ideal convergences of real-valued functions.* Real Analysis Exchange 46 (2021), no. 2, 367–394.
19. M. Repický, *Spaces not distinguishing ideal convergences of real-valued functions, II.* Real Analysis Exchange 46 (2021), no. 2, 395–422.

## REFERENCIE

Štefan Tkačik, Tomáš Lengyelfalusy (2021). *Lev Bukovský*. Osobnosti slovenskej matematiky. 3. diel. Ružomberok: Verbum, 62 s. ISBN: 978-80-561-0844-4.

# 4

## BUDÚCNOSŤ SEMINÁRA

*Jaroslav Šupina*

Každý z nás by rád vedel predpovedať budúcnosť. Očakáva sa to denne od meteorológov, ekonomických a finančných analytikov, politických komentátorov a pod. O ich úspešnosti máme vytvorenú svoju osobnú mienku. Ja sa do predpovede budúcnosti nepúšťam. Pokúsim sa však opísať tri faktory, ktoré považujem za dôležité pri rozvoji seminára. Je to v prvom rade aktuálnosť výskumu vo vedeckých oblastiach seminára, nasleduje kontakt seminára so zaujímavými problémami a nakoniec, samotný ľudský potenciál.

Začnem tým posledným. Podľa mojich dostupných údajov (súčasťou seminára som približne od roku 2006), sa seminár v súčasnej podobe sformoval v druhej polovici sedemdesiatych rokov a s malými prestávkami funguje dodnes. To znamená, že o pár rokov bude oslavovať okrúhle výročie, celé polstoročie. Nikto z pôvodných zakladajúcich členov už nie je jeho stálou súčasťou, a teda došlo k úplnému odovzdaniu žezla inej generácii. Aktuálnymi členmi seminára sú Miroslav Repický a Peter Eliaš zo SAV, Jaroslav Šupina z UPJŠ, postdoktorandskí výskumníci UPJŠ Miguel Antonio Cardona Montoya a Serhii Bardyla, Vierka Gavalová z TUKE, ktorá je momentálne na materskej dovolenke, a nakoniec, doktorand Adam Marton. Veková štruktúra seminára je preto teraz vyvážená, so zástupcami mnohých vekových kategórií. Aby bola zabezpečená udržateľnosť seminára, musí sa zabezpečiť i prílev budúcich mladších členov. To je vo veľkej miere závislé na Ústave matematiky UPJŠ, hlavným školiacim pracoviskom učiteľov matematiky v regióne pre druhý stupeň základných škôl, pre stredné školy a pre univerzity. Len upresním, že región Košíc je silne založený na technickom a informatickom priemysle, preto je dopyt po takýchto učiteľoch vysoký. Aby si Ústav matematiky UPJŠ zachoval svoju spôsobilosť vychovávať učiteľov matematiky, musí rozvíjať široké portfólio výskumu v nej, od krajne aplikovaného až po silne teoretické. Práve to posledné spadá do pôsobnosti seminára.

Problematika seminára sa rokmi presunula z dominantnej teórie množín, prípadne teoreticko-množinovej topológie, na prevažujúce aplikácie teórie množín v teoreticko-množinovej topológii, teórii reálnych funkcií, výberových princípoch a pod. Teória množín bola založená Georgom Cantorom približne pred 150 rokmi, pričom topológia sa ako samostatná matematická disciplína vyčlenila na začiatku dvadsiateho storočia. Rozoberať ich históriu a súčasné výzvy je nad rámec tejto publikácie i autora tohto textu. Z ďalších odstavcov by nepriamo malo vyplynúť, že o otvorené problémy nie je núdze. Ja by som však rád spomenul aspoň jeden významný výsledok, ku ktorému prispel Miguel Cardona a Diego Mejía s viedenskou skupinou, všetkých ešte spomeniem v ďalších odstavcoch. Dlhšie obdobie bola otvorená otázka, či by k štandardným axiómam teórie množín mohla byť pridaná axióma hovoriaca o rozdielnosti všetkých desiatich kardinálnych invariantov tzv. Cichońovho diagramu, štandardného nástroja teoreticko-množinovej topológie. Len v posledných rokoch boli vyvinuté dostatočne jemné metódy teórie množín, ktoré dovolili dať na túto otázku kladnú odpoveď. Problém, aké poradia kardinálnych invariantov Cichońovho diagramu sú možné, je však stále otvorený.

Zdrojov aktuálnych matematických problémov pre seminár je viacero. Sú nimi odborné časopisy, stretnutia komunity (konferencie, workshopy a pod.) a asi najvplyvnejším sú osobné kontakty s kolegami pracujúcimi v danej problematike. V prípade odborných časopisov sa dnes dá spoľahnúť na ich elektronickú verziu. Občas bývajú problémy s dostupnosťou kvôli ich cene, avšak často je možné nájsť predprintovú verziu na arXive alebo webovej stránke autora. Stretnutia komunity bývajú časté, teda niekoľkokrát ročne, i v tejto lokalite strednej Európy alebo jej blízkych miest. Zo všetkých spomeňme aspoň zimnú školu konajúcu sa každoročne v Česku. Samozrejme, účasť členov seminára na nich je ohraničená finančnými prostriedkami, ktoré závisia na získaní grantov.

Najväčším a najvplyvnejším centrom výskumu v oblastiach seminára je Viedeň. Menšie skupiny sa vyskytujú vo všetkých krajinách susediacich so Slovenskom. Aj keď sa so všetkými snažíme udržiavať rozumné vzťahy, momentálne výskumne najintenzívnejšie spolupracujeme s viedenskou skupinou. Obaja postdoktorandi na seminári pochádzajú z viedenskej školy, Miguel tam na Technickej univerzite absolvoval doktorandské štúdium a Serhii na Viedenskej univerzite niekoľkoročný postdoktorandský pobyt. Na Viedenskej univerzite absolvoval polročný postdoktorandský pobyt i autor textu. Z najväčšieho suseda Slovenska by som nemal zabudnúť spomenúť aspoň skupinu v Gdańsku.

Tradičným centrom blízkym Košiciam je Pražská škola. Historicky je to škola, z ktorej pochádza profesor Bukovský, a s ktorou udržoval intenzívne kontakty celý život po svojom presune do Košíc. Pôvodní členovia pražského seminára z obdobia, kedy tam pôsobil profesor Bukovský, už nie sú medzi nami alebo nepôsobia v Prahe. Aj v tomto prípade došlo k presunu žezla, tentokrát spolupráce, na mladšiu generáciu. Napriek tomu boli v posledných rokoch realizované viaceré pracovné cesty v oboch smeroch, pričom Vierka Gavalová absolvovala v Prahe počas svojho doktorandského štúdia niekoľkomesačné výskumné pobyty.

Zo vzdialenejších regiónov, intenzívna spolupráca prebieha s Diegom Mejíom, ktorý dlhoročne pôsobí v Japonsku. Je mentorom Miguela Cardonu už dlhšie obdobie a veľká časť výskumu v rámci dizertačnej práce Vierky Gavalovej prebiehala v spolupráci s ním. Za posledné obdobie došlo k pracovným návštevám Vierky Gavalovej, Miguela Cardonu a autora tohto textu v Japonsku a opačne, k pracovným návštevám

Diega v Košiciach. Miroslav Repický spolu s Diegom vedú výskum slalomových kardinálnych invariantov, do ktorého sú zapojení i iní členovia seminára.

Intenzívna spolupráca prebieha i so skupinou zaoberajúcou sa topológiou a reálnymi funkciami s centrom v Bratislave. Pod vedením docentky Holej sme spolu na obdobie rokov 2020 až 2025 získali grant APVV s názvom Topologické štruktúry a priestory funkcií.

Týmto by som ukončil sumár niekoľkých faktorov, ktoré silne ovplyvňujú ako sa bude seminár v budúcnosti vyvíjať. Čitateľ by mi mohol určite vyčítať, že som neidentifikoval tie faktory, ktoré by mohli do vývoja seminára zasiahnuť negatívne. Mojou úlohou však nebolo urobiť hĺbkovú a úplnú analýzu budúcnosti seminára, ale priniesť pohľad na jeho možnú budúcnosť. Pre mňa to znamená tú pozitívnu budúcnosť.