5

NAJÚSPEŠNEJŠIA PROBLEMATIKA RIEŠENÁ KOŠICKOU ŠKOLOU DISKRÉTNEJ MATEMATIKY

Stanislav Jendroľ, Tomáš Madaras, Gabriel Semanišin

5.1 Úvod

Kvôli porozumeniu nasledujúceho textu je potrebné uviesť základné a často používané pojmy a označenia, s ktorými pracuje súčasná diskrétna matematika v oblastiach ako je teória grafov, kombinatorická teória máp na plochách a kombinatorická teória konvexných mnohostenov. Tieto sú nevyhnutné k aspoň intuitívnemu porozumeniu obsahu tejto časti publikácie.

Začnime pojmom *kocka*. Je to trojrozmerný objekt ohraničený šiestimi zhodnými štvorcami, ktorý má dvanásť *hrán* a osem rohov. Štvorcom hovoríme *steny*, rohy nazývame *vrcholy*. V každom vrchole sa stretávajú tri hrany a tri steny, každá hrana spája dva rôzne vrcholy a je spoločná práve dvom stenám. Kocka má ešte nasledujúcu vlastnosť (konvexnosť): ak spojíme úsečkou ľubovoľné dva jej rôzne body (či už z povrchu alebo z vnútra, alebo kombinovane), tak úsečka, ktorá ich spája vždy bude celá obsiahnutá v kocke. Túto vlastnosť majú kocky rôznych veľkostí a je zachovaná aj pre telesá, ktoré vzniknú z kocky malou zmenou polohy jej vrcholov (steny takéhoto telesa už nemusia byť štvorce, ale iné rovinné štvoruholníky). Navyše možno povedať, že mnohé ďalšie telesá – kvádre, rovnobežnosteny či zrezané štvorboké ihlany – sú vzdialene podobné kocke v zmysle, že z nich možno vhodnou spojitou deformáciou (ktorá zachováva počet vrcholov, hrán a stien a vzťahy ich vzájomnej susednosti) kocku získať; hovoríme, že všetky tieto telesá majú rovnaký typ.

Intuitívne definujeme **konvexný mnohosten** ako konvexný trojrozmerný útvar ohraničený rovinnými stenami (mnohouholníkmi), ktorých hrany sú úsečky, pričom každá hrana je spoločná práve dvom stenám a spája práve dva vrcholy; v každom vrchole sa stretávajú aspoň tri hrany.

Mnohouholník (stena), ktorý je ohraničený k hranami sa nazýva *k-uholník*. Číslo k sa tiež volá stupeň steny. Vrchol, v ktorom sa stretáva k hrán, sa nazýva *k-vrchol*; v tomto prípade číslo k nazývame takisto **stupeň vrchola**.

Vrcholy a hrany mnohostena vytvárajú kombinatorickú štruktúru, ktorú nazývame **graf mnohostena**.

Pojem grafu mnohostena môžeme zovšeobecniť (abstrahujúc od geometrickej štruktúry jemu prislúchajúceho telesa) nasledovne: Nech V je konečná množina prvkov (nazývame ich vrcholy) a nech E je podmnožina množiny $P_2(V)$ všetkých dvojprvkových podmnožín množiny V; jej prvky nazývame hrany. Usporiadanú dvojicu množín $G = (V, E)$ nazývame (jednoduchý) **graf**. Graf H je **podgrafom** grafu G, ak je jeho množina vrcholov, resp. hrán je podmnožinou množiny V, resp. E. Graf H je **indukovaným podgrafom** grafu G na podmnožine $W \subseteq V$ vrcholov grafu G, ak $W = V(H)$ a $E(H) = E(G) \cap P_2(W)$.

Ak hrana $e = u, v = uv$ je tvorená vrcholmi u, v, tak hovoríme, že vrcholy u a v sú **susedné**, a že sú *konce hrany* e; tiež hovoríme, že vrchol u (resp. v) a hrana e **incidujú**. Ak dve rôzne hrany incidujú s tým istým vrcholom, tak hovoríme, že sú **susedné**. **Stupeň vrchola** u v grafe G je rovný počtu hrán, ktoré incidujú s u. Pod **váhou** $w(H)$ **podgrafu** H **v grafe** G rozumieme súčet stupňov vrcholov grafu H v grafe G.

Postupnosť navzájom rôznych vrcholov $x_1, \dots, x_n$ je **cestou** v grafe G, ak dvojica $x_i x_{i+1}$ je hranou z E pre každé $i = 1, \dots, n-1$. Postupnosť navzájom rôznych vrcholov

$x_1, \dots, x_n$ je **kružnica** dĺžky n v grafe G, ak dvojica $x_i x_{i+1}$ je hranou z E pre každé $i = 1, \dots, n-1$ a aj dvojica $x_n x_1$ patrí do E. Cesta, resp. kružnica na k vrcholoch sa volá k**-cesta** resp. k**-kružnica**. Kružnica sa nazýva **hamiltonovská**, ak prechádza všetkými vrcholmi grafu, t.j. ak jej dĺžka je rovná počtu vrcholov grafu.

Graf G je **súvislý**, ak medzi každou dvojicou jeho vrcholov existuje cesta. Graf G je r**-súvislý**, ak ostáva súvislým po odstránení ľubovoľných $r-1$ vrcholov; to je ekvivalentné s tvrdením (Mengerova veta), že medzi každou dvojicou jeho vrcholov u, v existuje r vzájomne vnútorne vrcholovo disjunktných ciest (t.j. ich spoločné vrcholy sú len u, v).

Guľová plocha (alebo **orientovateľná plocha rodu** 0) je množina všetkých bodov v (trojrozmernom) priestore, ktoré majú od daného pevného bodu konštantnú kladnú vzdialenosť. Príkladom **toroidálnej plochy** (**orientovateľnej plochy rodu** 1) je pneumatika (čiže rotačná plocha vytvorená rotáciou kružnice okolo osi ležiacej mimo nej). Dá sa tiež získať z guľovej plochy tak, že sa do guľovej plochy vyrežú dva kruhové otvory a následne sa spoja zakrivenou valcovou plochou (rúčkou) s dvomi kruhovými otvormi tak, aby stotožnením dvojíc otvorov oboch plôch vznikla jedna nová „hladká kompaktná" plocha. **Orientovateľná plocha rodu** g sa dá podobne získať pridaním g rúčok vyššie opísaným spôsobom ku guľovej ploche. Detailnejšie o plochách z kombinatorického pohľadu sa možno dozvedieť z monografie [G. Ringel, *Map color theorem*, **Springer-Verlag, Berlin 1974**].

Pod **nakreslením** grafu G na plochu rozumieme priradenie rôznym vrcholom grafu rôznych bodov plochy a hranám xy oblúkov spájajúce odpovedajúce body x a y plochy tak, aby žiaden oblúk odpovedajúci hrane sám seba nepretínal, a aby neobsahoval žiaden bod odpovedajúci vrcholu grafu ako vnútorný bod. Ďalej požadujeme, aby každé dva oblúky odpovedajúce dvom rôznym hranám sa pretli v maximálne jednom spoločnom bode. Také nakreslenie grafu na plochu, v ktorom žiadne dva oblúky odpovedajúce hranám grafu nemajú spoločný vnútorný bod, nazývame **vnorenie** grafu G do plochy.

Ak odstránime z plochy body odpovedajúce vrcholom a hranám vnoreného grafu, plocha sa rozpadne na oblasti, ktoré nazývame **steny vnorenia**. Ak každá stena vnorenia je homeomorfná otvorenému kruhu (t.j. dá sa spojito deformovať do jediného bodu), tak vnorenie sa nazýva bunkové vnorenie; takto vnorený graf sa nazýva **mapa**. Ak graf G má vnorenie do roviny (a teda aj do guľovej plochy), tak sa nazýva **planárny graf**. Vnorený planárny graf do roviny sa volá **rovinný graf**. Ak vrchol (resp. hrana) vnoreného grafu leží na (topologickej) hranici steny, tak hovoríme, že vrchol (resp. hrana) **inciduje so stenou**.

Je známe (Steinitzova veta z r. 1922), že graf G je grafom konvexného mnohostena práve vtedy, keď je **planárny** a **3-súvislý**. Ak graf mapy je 3-súvislý, tak mapa sa nazýva **polyedrálna mapa**.

5.2 Stenové a vrcholové vektory konvexných mnohostenov

Najúspešnejšou problematikou riešenou počas počiatočných rokov školy bola istá skupina otvorených otázok a hypotéz, ktorá sa týkala stenových a vrcholových vektorov konvexných trojrozmerných mnohostenov a ich analógií na plochách rôznych od guľovej plochy. Išlo o nasledujúci problém:

> Každému konvexnému mnohostenu P je možné priradiť dve postupnosti: stenový vektor $(p_3(P), p_4(P), \ldots)$ a vrcholový vektor $(v_3(P), v_4(P), \ldots)$, kde $p_i(P)$, resp. $v_i(P)$ označuje počet i-uholníkov stien mnohostena P, resp. počet jeho vrcholov stupňa i.
> Úlohou bolo popísať vlastnosti, ktoré majú mať postupnosti $p = (p_3, p_4, \ldots)$ a $v = (v_3, v_4, \ldots)$ nezáporných celých čísel, pre ktoré existuje konvexný mnohosten P taký, že $p_i = p_i(P)$, resp. $v_i = v_i(P)$, pre každé $i \geq 3$. Ak taký mnohosten existuje, tak dvojica postupností p a v sa volá *realizovateľná*.

Prvú prácu o tejto úlohe uverejnil v roku 1891 nevidiaci nemecký geometer V. Eberhard. Týkala sa kubických mnohostenov. Jej dôkaz zaberá takmer polovicu 300-stránkovej knihy, ktorú V. Eberhard o konvexných mnohostenoch napísal. B. Grünbaumovi sa podarilo nájsť omnoho kratší dôkaz tejto vety, ktorý sa už nachádza v jeho knihe [*Convex Polytopes*, **John Wiley & Sons, Ltd. 1967**]. V tejto knihe a v niekoľkých nasledujúcich článkoch sa venoval danej úlohe, pričom sformuloval niekoľko otvorených problémov a hypotéz. Nám sa jednu z nich podarilo vyvrátiť a jeho problém zodpovedať v úplnosti (v [S. Jendroľ, E. Jucovič, *On a conjecture of B. Grünbaum*, **Discrete Mat., 2 (1972), 35 – 49**]). Motivovaní Grünbaumovymi problémami a jeho knihou, S. Jendroľ, E. Jucovič a M. Trenkler získali a publikovali (zväčša v kvalitných zahraničných časopisoch) celý rad pekných výsledkov týkajúcich sa realizovateľnosti postupností ako stenových vektorov 3-regulárnych, 4-regulárnych, 5-regulárnych, $(3,4)$-regulárnych, $(3,5)$-regulárnych a autoduálnych konvexných trojrozmerných mnohostenov. Všetky tieto výsledky tvoria časť obsahu Jucovičovej monografie [*Konvexné mnohosteny*, **Veda, Bratislava 1981**].

Doteraz neprekonané výsledky o realizovateľnosti dvojíc postupností p a v sa podarili E. Jucovičovi a S. Jendroľovi. Zo slávneho Eulerovho vzorca (objaveného v r. 1752)

$$s + v - h = 2$$

kde s znamená počet stien daného mnohostena, v počet jeho vrcholov a h počet jeho hrán, sa dajú odvodiť dve nezávislé nutné podmienky

$$\begin{aligned} \mathtt{A(4)} \quad &: \quad \sum_{k\geq 3}(4-k)p_k + \sum_{k\geq 3}(4-k)v_k = 8 \ \text{ a} \\ \mathtt{A(6)} \quad &: \quad \sum_{k\geq 3}(6-k)p_k + \sum_{k\geq 3}(6-2k)v_k = 12, \end{aligned}$$

pre vzájomné vzťahy členov postupností p a v. Podmienka $A(4)$ však nedáva žiadnu informáciu o parametroch p_4 a v_4, druhá podmienka A(6), nedáva žiadnu informáciu o parametroch p_6 a v_3. Tretia nezávislá nutná podmienka

$$B: \sum_{k\geq 3} kp_k = \sum_{k\geq 3} kv_k = 2h,$$

nezávisiaca od Eulerovho vzorca však dáva vzájomnú informáciu o všetkých zložkách p a v. Preto nech $R(4,p,v)$, resp. $R(6,p,v)$ je množina všetkých možných hodnôt p_4, resp. p_6, s ktorými sú postupnosti p a v spĺňajúce A(4) a B, resp. A(6) a B realizovateľné.

Jucovič ukázal, že množina $R(4,p,v)$ obsahuje všetky nezáporné celé čísla väčšie ako nejaká konštanta ([E. Jucovič, *On face-vectors and vertex-vectors of cell-decompositions of orientable-manifolds*, **Math. Nachr. 73 (1976) 285 – 295**]).

V práci [S. Jendroľ, *On face vectors and vertex vectors of convex polyhedra*, **Discrete Math. 118 (1993) 119 – 144**] bolo ukázané, že situácia v prípade množín $R(6,p,v)$ je omnoho zložitejšia. Všetky množiny $R(6,p,v)$ je možné vzhľadom na dvojice p,v rozdeliť do štyroch dobre charakterizovaných skupín. Pre niektoré dvojice p,v je množina $R(6,p,v)$ prázdna, pre iné dvojice p,v množina $R(6,p,v)$ obsahuje, počnúc nejakou konštantou, všetky párne čísla a žiadne nepárne číslo, pre ďalšie dvojice p,v množina $R(6,p,v)$ obsahuje, počnúc nejakou konštantou, všetky nepárne čísla a žiadne párne číslo, a pre všetky ostatné dvojice p,v množina $R(6,p,v)$obsahuje, počnúc nejakou konštantou, všetky nezáporné celé čísla.

E. Jucovič vo vyššie spomínanej práci a S. Jendroľ v inom, neskôr publikovanom článku [S. Jendroľ, *On face-vectors and vertex-vectors of polyhedral maps on orientable* 2*-manifolds*, **Math. Slovaca 43 (1993) 393 – 416**] ukázali, že pre polyedrálne mapy na orientovateľných plochách rôznych od guľovej a toroidálnej plochy príslušné množiny ku $R(4,p,v)$, resp. $R(6,p,v)$ obsahujú, počnúc nejakou konštantou všetky nezáporné celé čísla. Príslušné množiny $R(4,p,v)$, resp. $R(6,p,v)$ ku polyedrálnym toroidálnym mapám sa správajú analogicky ako tie pre konvexné mnohosteny.

Analogické výsledky pre neorientovateľné plochy sú doteraz nespracované.

O kvalite spomínaných výsledkov svedčí okrem iného aj skutočnosť, že sa o nich dostali zmienky aj v monografických dielach [*Handbook of graph theory*, **CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2014, 820 – 859** (R. Nedela, M. Škoviera, *Topological Graph Theory*)], [*Handbook of discrete and computational geometry*, **CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 1997, 331 – 344** (kapitoly G. Kalai, *Polytope skeletons and paths* a U. Brehm, E. Schulte, *Polyhedral Maps*)]. V monografii [P. M. Gruber, J. M. Wills, *Handbook of convex geometry*, **North Holand, 1993**] v kapitole 2.3 Combinatorial aspects of convex polytopes je našej práci venovaná celá jedna sekcia. V druhom rozšírenom vydaní monografie [B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, **Springer-Verlag, New York 2003**] sú tieto výsledky tiež citované.

5.3 Autoduálne mnohosteny

Dva mnohosteny P_1 a P_2 sú navzájom duálne, ak existuje bijekcia δ zobrazujúca vrcholy P_1 do stien P_2 a steny P_1 do vrcholov P_2 tak, že zachováva incidencie vrchol/stena i stena/vrchol. Ak $P_1 = P_2 = P$, daná bijekcia sa nazýva autodualita a mnohosten P sa volá autoduálny. Ak existuje dualita δ z mnohostena P do neho samotného, tak P sa volá autoduálny; v tomto prípade je δ je špecifická permutácia na množine vrcholov a stien P. Hodnosť autoduality δ je definovaná ako najmenšie kladné číslo $r(\delta) = n$, pre ktoré δ^n je identita; hodnosť autoduálneho mnohostena P je $r(P) = r(\delta^*)$, kde $r(\delta^*)$ je minimálne $r(\delta)$ spomedzi všetkých autodualít δ mnohostena P.

Grünbaum a Shephard položili v [*Is selfduality involutory?*, **Amer. Math. Monthly 95 (1988) 729 – 733**] otázku, či každý autoduálny mnohosten má hodnosť 2. Nám sa podarilo dať na danú otázku negatívnu odpoveď v [S. Jendroľ, *A non-involutory selfduality*, **Discrete Math. 74 (1989) 325 – 326**]. Skonštruovali sme príklad autoduálneho mnohostena, ktorý má hodnosť 4, a ktorý bol v práci [A. Ashley, B. Grünbaum,

G. C. Shephard, W. Stromquist, *Self-duality groups and ranks of self-dualities*, in **The Victor Klee festschrift, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol. 4, 1991**] nazvaný **Jendroľov mnohosten**. Je to prvý známy príklad mnohostena s touto vlastnosťou.

S. Jendroľ v práci [*On symmetry groups of selfdual polyhedra*, **Ann. Discrete Math. 134 (1994) 139 – 150**] neskôr popísal všetky grupy symetrií, ktoré môžu mať trojrozmerné autoduálne mnohosteny. Tento fakt je citovaný vo vyššie spomínanom druhom vydaní Grünbaumovej monografie *Convex Polytopes*.

5.4 Ľahké hrany

Ďalšou veľmi úspešnou problematikou, ktorú Košická diskrétno-matematická skupina študovala, bola teória ľahkých podgrafov. Počiatočným impulzom tohto štúdia bolo tvrdenie dokázané slovenským matematikom A. Kotzigom, že každý konvexný mnohosten obsahuje hranu, ktorej koncové vrcholy majú súčet stupňov najviac 13; naviac hranica 13 je vo všeobecnosti nezmenšiteľná. Taká hrana sa volá **ľahká hrana** a súčet stupňov jej koncových vrcholov sa nazýva **váha hrany**.

Kotzig tento výsledok publikoval v slovenskom jazyku a v slovenskom časopise (viď [A. Kotzig, *Príspevok k teórii eulerovských polyedrov*, **Mat.-fyz. čas. 5 (1955), 101 – 113**]). Tento pekný výsledok sa nedostal do Grünbaumovej monografie. Keď sa ho Grünbaum dozvedel, začal ho popularizovať na Západe. Výsledok sa v tom čase zapáčil geniálnemu matematikovi P. Erdősovi, ktorý vyslovil domnienku, že tvrdenie platí aj pre širšiu triedu planárnych grafov s minimálnym stupňom aspoň 3. Túto hypotézu sa podarilo dokázať Američanovi D. Barnetteovi a nezávisle Rusovi O. V. Borodinovi v r. 1989.

V Košiciach začal túto problematiku študovať prof. Jucovič. Ako prvý sa pokúsil ukázať, že takýchto hrán v konvexných mnohostenoch môže byť veľa. Kvôli upresneniu možností pre váhu ľahkej hrany zaveďme nasledujúce označenie: nech $e = xy$ je hrana s koncovými vrcholmi x a y. Ak x je i-vrchol a y je j-vrchol, tak hrana e sa tiež nazýva (i, j)-hrana (pozn. budeme tiež uvažovať (i, j^-)-hrany resp. (i^-, j^-)-hrany, kde y, resp. x je vrchol stupňa najviac j, resp. i). Jucovič dokázal nerovnosť typu $\sum_{i+j\leq 13} a_{i,j}e_{i,j} \geq 120$, kde $e_{i,j}$ znamená počet (i, j)-hrán. I. Fabrici a S. Jendroľ našli analogickú nerovnosť, v ktorej koeficienty $a_{i,j}$ sú vo všeobecnosti nezmenšiteľné, viď [I. Fabrici, S. Jendroľ, *An inequality concerning edges of minor weight in convex 3-polytopes*, **Discuss. Math. Graph Theory 16 (1996) 81 – 87**]. Z ich tvrdenie bezprostredne vyplýva nasledujúci fakt známy skôr aj Borodinovi: Každý konvexný mnohosten obsahuje $(3, 10^-)$-hranu, $(4, 7^-)$-hranu alebo $(5, 6^-)$-hranu. Hranice $10, 7$ a 6 sú vo všeobecnosti najlepšie možné.

Ivančovi sa podarilo dokázať nasledujúcu analógiu Kotzigovej vety pre polyedrálne mapy:

> ak G je polyedrálna mapa na orientovateľnej ploche rodu g, tak G obsahuje hranu e takú, že pre jej váhu platí $w(e) \leq 2g + 13$ ak $0 \leq g \leq 3$ a $w(e) \leq 4g + 7$, ak $g \geq 3$, pričom obe hranice sú tesné,

viď [J. Ivančo, *The weight of a graph*, **Ann. Discrete Math. 51 (1992) 113 – 116**]. Neskôr S. Jendroľ, M. Tuhársky a H. J. Voss ukázali, že ak polyedrálna mapa G má dostatočne veľa vrcholov, tak G obsahuje $(3, 12^-)$-hranu alebo $(4, 8^-)$-hranu, alebo $(6^-, 6^-)$-hranu. Hranice $12, 8$ a 6 sú tesné, viď [S. Jendroľ, M. Tuhársky, H.-J. Voss, *A Kotzig type theorem for large maps on surfaces*, **Tatra Mt. Math. Publ. 27 (2003), 153 – 162**].

Neskôr S. Jendroľ a M. Tuhársky dokázali analógiu Ivančovej vety aj pre neorientovateľné plochy.

5.5 Ľahké cesty

Z Eulerovho vzorca je ľahké odvodiť, že každý konvexný mnohosten má vrchol stupňa najviac 5. Z Kotzigovej vety ako dôsledok vyplýva, že každý konvexný mnohosten obsahuje cestu na dvoch vrcholoch, z ktorých každý má stupeň najviac 10. I. Fabrici a S. Jendroľ dokázali nasledovné tvrdenie zovšeobecňujúce obidva predošlé výsledky:

> ak konvexný mnohosten (presnejšie, jeho graf) obsahuje k-cestu ako podgraf, tak obsahuje aj takú k-cestu, že každý jej vrchol má stupeň najviac $5k$. Hranica $5k$ je tesná.

Zároveň ukázali, že žiaden iný súvislý podgraf takúto vlastnosť vo všeobecnosti nemá, viď [I. Fabrici, S. Jendroľ, *Subgraphs with restricted degrees of their vertices in planar 3-connected graphs*, **Graphs Combin. 13 (1997) 245 – 250**].

Tento výsledok sa dá zlepšiť, ak sa pozrieme na váhy ciest. B. Mohar [*Light paths in 4-connected graphs in the plane and other surfaces*, **J. Graph Theory 34 (2000), 170 – 179**] dokázal, že ak graf konvexného mnohostena je 4-súvislý a obsahuje k-cestu, tak obsahuje aj takú cestu Q na k vrcholoch, že jej váha $w(Q)$ je najviac $6k - 1$. Navyše platí, že hranica $6k - 1$ je tesná. B. Mohar tiež skonštruoval nekonečnú sériu 3-súvislých rovinných grafov, v ktorých každá k-vrcholová cesta má váhu aspoň $\frac{9}{16}k\ log_2 k$.

I. Fabrici, J. Harant a S. Jendroľ dokázali v [*Paths of low weight in planar graphs*, **Discuss. Math. Graph Theory 28 (2008), 121 – 135**], že každý 3-súvislý planárny graf obsahujúci cestu na k vrcholoch obsahuje aj k-cestu Q váhy $w(Q) \leq \frac{3}{2}k^2 + O(k)$. Tiež ukázali, že každý konvexný mnohosten obsahujúci k-cestu a pozostávajúci len z 3-stien obsahuje aj k-cestu Q, ktorej váha spĺňa $w(Q) \leq k^2 + 13k$.

Aj práca [*On weights of induced paths and cycles in claw-free and $K_{1,r}$- free graphs*, **J. Graph Theory 36 (2001), 131 – 143**] od autorov J. Harant, M. Voigt, S. Jendroľ, B. Randerath, Z. Ryjáček a I. Schiermeyer bola motivovaná našimi výsledkami o ľahkých cestách v rovinných grafoch a Ryjáčkovými výsledkami o grafoch bez indukovaného podgrafu $K_{1,3}$.

Ukazuje sa, že problém ľahkých ciest je zaujímavý aj pre všeobecné súvislé grafy. Prvé kroky v tomto smere vôbec boli vykonané v práci [J. Harant, S. Jendroľ, *Lightweight paths in graphs*, **Opuscula Math. 39 (2019), 829 – 837**].

Ak sa sústredíme na skúmanie vrcholovej štruktúry krátkych ľahkých ciest v rovinných grafoch, môžeme dostať ďalšie zaujímavé poznatky. Formálne ich možno opísať pomocou typov ciest: k-vrcholová cesta $v_1, v_2, \ldots, v_k$ v grafe G sa nazýva $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$-cesta, ak stupeň vrchola v_i v grafe G je d_i (ako sme už spomenuli pri ľahkých hranách, aj pri typoch ciest pripúšťame označenie d_i^- v prípade, že príslušný stupeň nie je väčší ako d_i). Situácie pre ľahké 2-cesty (a teda ľahké hrany) je popísaná vyššie. Prácou [S. Jendroľ, *A structural property of convex 3-polytopes*, **Geometriae Dedicata 68 (1997) 91 – 99**] sme naštartovali štúdium ľahkých 3-ciest v 3-súvislých rovinných grafoch. Ukázali sme, že každý graf z tejto množiny obsahuje ľahkú cestu, ktorá je jedného z desiatich rôznych typov. Práca zaujala najmä ruských matematikov z Novosibirska vedených O. V. Borodinom, ktorí okamžite rozbehli intenzívny výskum v tomto smere a vylepšili náš výsledok pre viaceré podmnožiny rovinných 3-súvislých grafov. Na túto našu prácu sme zaznamenali 22 citácií.

Párny graf $K_{r,2}$ pre $r \geq 2$ neobsahuje vo všeobecnosti ľahkú hranu (s pevným konštantným horným ohraničením jej váhy), lebo všetky jeho hrany majú váhu $r + 2$ a r môže byť ľubovoľne veľké. Keďže tento graf je 2-súvislý, dostávame, že existenciu ľahkej hrany nemožno v 2-súvislých rovinných grafoch vo všeobecnosti zaručiť. Ak sa však obmedzíme na také 2-súvislé rovinné grafy, v ktorých dĺžka najkratšej kružnice je aspoň 5, tak dostávame zaujímavé výsledky. S. Jendroľ sa spolu so svojou doktorandkou M. Macekovou a neskôr aj s ďalšími spoluautormi vrátili k štúdiu ľahkých 3-ciest v tejto triede grafov. V práci [S. Jendroľ, M. Maceková, *Describing short paths in plane graphs of girth at least 5*, **Discrete Math. 338 (2015), 149 – 158**] sme pre každé $g \geq 5$ charakterizovali všetky typy nevyhnutných 3-ciest v 2-súvislých rovinných grafoch, ktorých najkratšie kružnice majú dĺžky aspoň g. V [S. Jendroľ, M. Maceková, R. Soták, *Note on 3-paths in plane graphs of girth 4*, **Discrete Math. 338 (2015), 1643 – 1648**] sme doplnili vyššie spomínané výsledky aj pre 3-cesty v 2-súvislých rovinných grafoch s najkratšími kružnicami dĺžky aspoň 4. V [S. Jendroľ, M. Maceková, M. Montassier, R. Soták, *Optimal unavoidable sets of types of 3-paths for planar graphs of given girth*, **Discrete Math. 339 (2016), 780 – 789**] sme opísali optimálne množiny typov 3-ciest pre triedy 2-súvislých grafov s dĺžkami najkratších kružníc aspoň 5; naviac sme ukázali, že pre tú istú triedu grafov s vymedzeným obvodom môže existovať viacero rôznych množín optimálnych nevyhnutných typov 3-ciest. Aj tieto tri práce našli rýchlu odozvu v prácach spomínanej ruskej skupiny matematikov okolo O. V. Borodina. Na prvú z nich sme zaznamenali (podľa databázy Scopus) 24 citácií, na druhú 15 a na tretiu 9.

V práci [S. Jendroľ, M. Maceková, M, Montassier, R. Soták, *3-paths in graphs with bounded average degree*, **Discuss. Math. Graph Theory 36 (2016), 339 – 353**] sú študované vlastnosti 3-ciest vo všeobecných grafoch, ktoré majú pevne zhora ohraničený maximálny priemerný stupeň vrcholov v ich podgrafoch (nie sú teda viazané na vnorenia do plôch). Aj na ňu máme 9 citácií.

5.6 Súvislé ľahké podgrafy rôzne od ciest

Jedným z krásnych výsledkov, ktoré boli motivované Kotzigovou vetou o ľahkej hrane, je nasledujúce tvrdenie:

> Každý 3-súvislý planárny graf G na aspoň k vrcholoch obsahuje súvislý k-vrcholový podgraf H s váhou $w(H) \leq 8k - 1$;

je to výsledok práce [H. Enomoto, K. Ota, *Connected subgraphs with small degree sum in 3-connected planar graphs*, **J. Graph**

Theory 30 (1999), 191 – 203]. Toto tvrdenie takisto poukazuje na všeobecnú tendenciu pozorovateľnú v rovinných grafoch, resp. grafoch konvexných mnohostenov: vrcholy či steny (relatívne) malých stupňov majú tendencie zhlukovať sa do určitých klastrov. Príklad takýchto klastrov – k-cesty s vrcholmi stupňov najviac $5k$ – sme už spomenuli v predchádzajúcej časti; predchádzajúce výsledky I. Fabriciho a S. Jendroľa navyše ukazujú, že v 3-súvislých planárnych grafoch takéto klastre môžu byť dosť „chudobné“ (t.j. tvorené len cestami, resp. lineárnymi reťazcami stien malých stupňov). Na druhej strane, netriviálne klastre prvkov malých stupňov možno nájsť v rovinných grafoch, ktoré spĺňajú dodatočné „generické“ podmienky.

Historicky prvou podmienkou tohto druhu je požiadavka dostatočného minimálneho stupňa vrcholov. Už v roku 1940 Lebesgue dokázal, že každý konvexný mnohosten minimálneho vrcholového stupňa 5 obsahuje 3-stenu f, ktorej váha $w(f)$ je najviac 19. Nevediac o tomto výsledku, Kotzig v roku 1963 vylepšil túto hranicu na 18. Grünbaum vyslovil domnienku, že tesná hranica pre váhu takejto steny f je 17. Túto domnienku dokázal O. V. Borodin v práci [*Solution of problems of Kotzig and Grünbaum concerning the isolation of cycles in planar graphs*, **Math Notes 46 (1989), 835 – 837**]. V práci [S. Jendroľ, T. Madaras, *On light subgraphs in plane graphs of minimum degree five*, **Discussiones Mathematicae Graph Theory 16(2) (1996), 207 – 217**] bolo tiež ukázané, že v každom rovinnom grafe minimálneho stupňa 5 existuje tiež 3-hviezda $S_3 = K_{1,3}$, pre ktorú $w(S_3) \leq 23$ (hranica 23 je najlepšia možná). Z uvedenej práce i z prác [S. Jendroľ, T. Madaras, R. Soták, Z. Tuza, *On light cycles in plane triangulations*, **Discrete Math. 197/198 (1999), 453 – 467**] a [T. Madaras, R. Soták, *The 10-cycle is light in the family of all plane triangulations with minimum degree five*, **Tatra Mt. Math. Publ. 18 (1999), 35 – 56**] ďalej vyplýva, že v rovinnej triangulácii minimálneho stupňa 5 existuje r-kružnica s pevne zhora ohraničenou váhou práve vtedy, keď $3 \leq r \leq 10$. Ak rovinný graf min. stupňa 5 nie je trianguláciou, podobné výsledky sú známe len pre kružnice dĺžky najviac 7, pozri [T. Madaras, R. Škrekovski, H.-J. Voss, *The 7-cycle C_7 is light in the family of planar graphs with minimum degree 5*, **Discrete Mathematics 307 (11 – 12) (2007), 1430 – 1435**]. Charakterizácia podgrafov, pre ktoré platia analogické pozitívne výsledky, je v tomto prípade (na rozdiel od grafov konvexných mnohostenov vo všeobecnosti, resp. polyedrálnych grafov minimálneho stupňa aspoň 4) otvorená; z výsledkov I. Fabriciho, S. Jendroľa, T. Madarasa, R. Sotáka, Z. Tuzu a P. J. Owensa vyplýva, že žiaden planárny graf H maximálneho stupňa aspoň 5 alebo majúci blok na aspoň 11 vrcholoch nie je ľahký ani v množine všetkých 3-súvislých grafov minimálneho stupňa 5.

Podobný efekt (pre existenciu netriviálnych podgrafov malej váhy) ako podmienka minimálneho vrcholového stupňa 5 má i podmienka dostatočnej minimálnej veľkosti stien rovinného grafu – Lebesgue (popri horeuvedenom výsledku) dokázal, že v každom konvexnom mnohostene, ktorý má steny stupňov aspoň 5, vždy existuje 5-stena váhy najviac 17. Práca [T. Madaras, *On the structure of plane graphs with minimum face size 5*, **Discussiones Mathematicae Graph Theory 24(3) (2004), 403 – 411**] ďalej sleduje lokálnu štruktúru grafov vymedzených touto podmienkou, keď ukazuje – pre takéto polyedrálne grafy – existenciu 3-hviezdy s váhou najviac 13, či klastra dvoch susedných stien (5- a najviac 6-uholníkovej), ktorého vrcholy majú stupne najviac 9. Uvažovali sa tiež kombinované podmienky minimálneho stupňa vrcholov/stien spolu s minimálnou váhou/duálnou váhou hrán (práca [B. Ferencová, T. Madaras, *Light graphs in families of polyhedral graphs with prescribed minimum degree, face size, edge and dual edge weight*, **Discrete Mathematics 310(12) (2010), 1661 – 1675**], na ktorú neskôr nadviazali spoločné práce s doktorandom P. Hudákom [P. Hudák, T. Madaras, *On doubly light triangles in plane graphs*, **Discrete Mathematics 313(19) (2013), 1978 – 1988**]; [P. Hudák, M. Maceková, T. Madaras, P. Široczki, *Light graphs in planar graphs of large girth*, **Discussiones Mathematicae Graph Theory 36(1) (2016), 227 – 238**]; [P. Hudák, M. Maceková, T. Madaras, P. Široczki, *More on the* *structure of plane graphs with prescribed degrees of vertices, faces, edges and dual edges*, **Ars Mathematica Contemporanea 13(2) (2017), 355 – 366**]). Väčšina spomenutých prác zaznamenala početné a netriviálne citácie najmä v publikáciách sibírskej výskumnej grafovej skupiny pod vedením O. V. Borodina.

Motivovaní vyššie uvedenými výsledkami S. Jendroľ a jeho spolupracovníci prišli s konceptom ľahkých grafov definovaným nasledovne:

> Graf H je **ľahký** v množine grafov $\mathcal{A}$, ak aspoň jeden graf z $\mathcal{A}$ obsahuje ako podgraf graf H a existuje konštanta $w(H, \mathcal{A})$ taká, že každý graf G z $\mathcal{A}$, ktorý obsahuje ako podgraf kópiu H, má aj kópiu K grafu H takú, že $w(K) \leq w(H, \mathcal{A})$.

Tento koncept pokrýva vyššie uvedené výsledky o ľahkej hrane, ľahkých cestách a kružniciach a iných podgrafoch s pevne ohraničenou váhou a umožňuje ich porovnanie, hľadanie analogických tvrdení a ďalšie zovšeobecňovanie. V rámci ďalšieho plodného výskumu v tejto oblasti (na ktorom sa podieľala Košická škola, jej zahraniční spolupracovníci P. J. Owens, J. Harant, E. Hexel, H. Walther, R. Škrekovski a najmä prof. H.-J. Voss, ako aj ďalší zahraniční kolegovia, napr. O. V. Borodin a B. Mohar) dosiahnuté výsledky vyústili do stále živej teórie ľahkých grafov. Podrobnejšie sa o rozličných výsledkoch a otvorených problémoch tejto teórie pre rovinné grafy, resp. mapy na plochách vyšších rodov možno dozvedieť v prácach [S. Jendroľ, H.-J. Voss, *Light subgraphs of graphs embedded in the plane – A survey*, **Discrete Math. 313 (2013), 406 – 421**], resp. [S. Jendroľ, H.-J. Voss, *Light subgraphs of graphs embedded in 2-dimensional manifolds of Euler characteristic at most 0 – A survey*, in: **Paul Erdos and his Mathematics. II, Bolyai Society Mathematical Studies 11, Budapest 2002, 375 – 411**] (tu sa žiada povedať, že posledný menovaný článok vznikol na požiadanie zostavovateľov obsahu publikácie).

Nedávne dve práce o lokálnych vlastnostiach rovinných grafov ([T. Madaras, M. Tamášová, *Minimal unavoidable sets of cycles in plane graphs*, **Opuscula Mathematica, 38(6), (2018),**

859 – 870] a [T. Madaras, M. Tamášová, *Minimal unavoidable sets of cycles in plane graphs with restricted minimum degree and edge weight*, **Australasian Journal of Combinatorics 74(2) (2019), 240 – 252**]), sa týkajú naoko ľahšieho problému: existencie, resp. neexistencie špecifických krátkych kružníc v rozličných triedach rovinných grafov (bez požiadavky na nízky stupeň ich vrcholov); sofistikovanosť použitých konštrukcií grafov pre negatívne výsledky, ako i dôkazy existencie využívajúce metódu prerozdeľovania náboja (čo je klasická dôkazová technika pre farebnostné resp. štrukturálne tvrdenia o planárnych, rovinných či im podobných grafoch) nie je v princípe odlišná od náročných dôkazov v rámci teórie ľahkých grafov. To, že problematika ľahkých grafov je v prostredí Košickej školy i KOKOSu stále aktuálna, potvrdzujú aj nasledujúce dva čerstvé články: [K. Čekanová, M. Maceková, R. Soták, *Structure of edges in plane graphs with bounded dual edge weight*, **Discrete Math. 344 (2021) 112477**] a [K. Čekanová, M. Maceková, Z. Šárošiová, R. Soták, *Light 3-stars in embedded graphs*, **Discrete Math. 346 (2023) 113256**].

5.7 1-planárne grafy

Štúdium reprezentácií grafov ako kolekcií objektov s určenými vlastnosťami sa spočiatku uberalo už skôr spomenutou cestou výskumu vnorení grafov (do roviny, resp. plôch vyšších rodov); neskôr (cca od 40. rokov 20. stor.) sa objavili témy súvisiace s nakresleniami grafov, v ktorých sa hrany môžu pretínať (napr. problematika priesečníkového čísla). Ako zaujímavý koncept v tomto smere sa ukázalo mierne zovšeobecnenie pojmu planarity, kde sa pripúšťajú priesečníky na hranách nakreslenia v rovine, avšak najviac jeden na každej hrane; graf, pre ktorý existuje takéto nakreslenie sa nazýva **1-planárny**. Prvotne sa 1-planárne grafy skúmali najmä v súvislosti so simultánnymi vrcholovo-stenovými zafarbeniami rovinných grafov (a tiež kvôli Ringelovej hypotéze o ich 6-zafarbiteľnosti, ktorú dokázal Borodin v r. 1984). Úvahy o tom, že aj pre grafy z tejto triedy by mohli platiť analogické tvrdenia o ľahkých hranách, resp. ľahkých grafoch sa v prostredí Košickej školy objavili až na začiatku nového milénia (v tom období teória ľahkých grafov mala za sebou celú plejádu výsledkov o rovinných grafoch). Prvou takouto prácou bol článok [I. Fabrici, T. Madaras, *The structure of 1-planar graphs*, **Discrete Mathematics 307(7-8) (2007), 854 – 865**], kde autori dokázali platnosť analógie Kotzigovej vety o ľahkej hrane pre 3-súvislé 1-planárne grafy a viacero štrukturálnych výsledkov pre 1-planárne grafy s vysokým minimálnym stupňom vrcholov. Článok doposiaľ zaznamenal vyše 110 citácií podľa databázy Scopus (najmä v prácach čínskych matematikov) a je tak momentálne najcitovanejšou prácou Košickej školy o lokálnych vlastnostiach grafov.

Problematika vlastností 1-planárnych grafov bola neskôr rozpracovaná v niekoľkých prácach v rámci doktorandského štúdia D. Hudáka, pozri napr. [D. Hudák, T. Madaras, *On local structure of 1-planar graphs of minimum degree 5 and girth 4*, **Discussiones Mathematicae Graph Theory 29(2) (2009), 385 – 400**], resp. [D. Hudák, T. Madaras, *On local properties of 1-planar graphs with high minimum degree*, **Ars Mathematica Contemporanea 4(2) (2011), 245 – 254**] a tiež ďalšie, početne citované práce D. Hudáka o iných aspektoch 1-planárnych grafov v spoluautorstve s J. Czapom ([J. Czap, D. Hudák, *1-planarity of complete multipartite graphs*, **Discrete Appl. Math. 160(4-5), 505 – 512**] s 26 citáciami, [J. Czap, D. Hudák, *On drawings and decompositions of 1-planar graphs*, **Electron. J. Combin. 20(2) (2013)**] s 22 citáciami, ako aj [J. Czap, *A note of colorings of 1-planar graphs*, **Inform. Process. Lett. 113 (2013), 516 – 517**] a [J. Czap, J. Przybylo, E. Škrabuľáková, *On an extremal problem in a class of bipartite 1-planar graphs*, **Discuss. Math. Graph Theory 36 (2016), 141 – 151**]).

Rozličné problémy, ktoré sa uvažovali pre planárne grafy, možno skúmať – pokiaľ to povaha problému dovoľuje – i pre 1-planárne grafy. Vďačnou a otvorenou témou v tomto smere je, napr. hamiltonovskosť vo vzťahu k maximalite grafu resp. jeho vrcholovej súvislosti. Prvé výsledky v tejto oblasti sa dosiahli v práci [D. Hudák, T. Madaras, Y. Suzuki, *On properties of maximal 1-planar graphs*, **Discussiones Mathematicae Graph Theory 32(4) (2012), 737 – 747**] pre maximálne 1-planárne grafy. V práci [I. Fabrici, J. Harant, T. Madaras, S. Mohr, R. Soták, C. T. Zamfirescu, *Long cycles and spanning subgraphs of locally maximal 1-planar graphs*, **Journal of Graph Theory 95 (2020), 125 – 137**] sa študovali najdlhšie kružnice a faktorové podgrafy vo vysokosúvislých 1-planárnych grafoch, ktorých priesečníky indukujú kompletné, resp. takmer kompletné 4-vrcholové grafy; autori dokázali, že existuje nekonečne veľa nehamiltonovských 5-súvislých slabo lokálne maximálnych 1-planárnych grafov (čo je markantný rozdiel oproti faktu, že každý 4-súvislý planárny graf je hamiltonovský), avšak, každý 4-súvislý lokálne maximálny 1-planárny graf je už hamiltonovský (obdoba Whitneyovej vety pre rovinné 4-súvislé triangulácie).

5.8 Erdősov problém o minimálnej váhe grafu

J. Ivančo prezentoval svoj pekný výsledok o ľahkej hrane v polyedrálnej mape na orientovateľnej ploche rodu $g \geq 0$ na medzinárodnom 4. Československom sympóziu o kombinatorike, ktoré sa konalo v Českých Prachaticiach v roku 1990. Prednáška veľmi zaujala prítomného prof. P. Erdősa. Počas diskusie sa spýtal: *„Aká je minimálna váha $w(e)$ hrany e v grafe $G = G(n,m)$, ktorý má n vrcholov a m hrán?“* Prvé kroky k odpovedi na Erdősovu otázku vykonali J. Ivančo a S. Jendroľ, ktorí v práci [*On extremal problems concerning weights of edges of graphs*, in: **Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 60. Sets, Graphs and Numbers, Budapest (Hungary) 1991 (North Holland, 1993), 399 – 410**] sformulovali domnienku, ako by malo riešenie vyzerať. Presnú odpoveď na otázku našli S. Jendroľ a I. Schiermeyer v práci [*On a max-min problem concerning weights of edges*, **Combinatorica 21 (2001), 351 – 359**], čím danú domnienku potvrdili.

K Erdősovej otázke sa S. Jendroľ a I. Schiermeyer spolu s M. Horňákom neskôr vrátili nasledujúcim spôsobom:

> Nech $\mathcal{P}$ je grafová vlastnosť. Aká je minimálna váha $w(e)$ nejakej hrany e v grafe $G = G(n, m, \mathcal{P})$, ktorý má n vrcholov, m hrán a zároveň vlastnosť $\mathcal{P}$?

V práci [*On maximum weight of a bipartite graph of given order and size*, **Discuss. Math. Graph Theory 33 (2013), 147 – 165**] autori našli úplnú odpoveď na vyššie položenú otázku v prípade, že $\mathcal{P}$ je vlastnosť „byť bipartitným grafom“. Tá istá trojica autorov našla úplné riešenie Erdősovej otázky aj pre prípad, keď vlastnosť $\mathcal{P}$ požaduje, aby graf G bol súvislý; riešenie je obsiahnuté v prácach [*On the maximum weight of a dense connected graph of given order and size*, **Discrete Math. 339 (2016), 1978 – 1984**] a [*On the maximum weight of a sparse connected graph of given order and size*, **Graphs Combin. 32 (2016), 997 – 1012**].

V práci [A. Gajdoš, M. Horňák, P. Hudák, T. Madaras, *On the maximum weight of a planar graph of given order and size*, **Discrete Appl. Math. 338 (2015), 2234 – 2241**] je Erdősova otázka vyriešená pre prípad, keď $\mathcal{P}$ je vlastnosť „byť planárnym grafom“.

5.9 Mnohosteny s najviac dvomi typmi hrán

V prípadoch konvexných mnohostenov je možné definíciu (a, b)-hrany sprísniť tak, že do úvahy vezmeme aj stupne stien incidentných s danou hranou. Na základe toho S. Jendroľ a M. Tkáč definovali typ hrany e ako štvoricu $((a, b); (m, n))$, kde a a b sú stupne vrcholov incidentných s hranou e a m, n sú stupne stien incidentných s e. S. Jendroľ ukázal, že existuje práve 9 konvexných mnohostenov s práve jedným typom hrán. Veľmi zaujímavou triedou konvexných mnohostenov sa ukázali byť tie, ktoré majú práve dva typy hrán. S. Jendroľ a M. Tkáč v práci [*Convex 3-polytopes with exactly two types of edges*, **Discrete Math. 84 (1990), 143 – 160**] kompletne charakterizovali mohutnosti množín všetkých takých mnohostenov. Následne boli popísané vrcholové vektory štvoruholníkových mnohostenov s dvomi typmi hrán v článku (na požiadanie vydavateľov) [S. Jendroľ, E. Jucovič, M. Trenker, *Vertex-vectors of quadrangular 3-polytopes with two types of edges*, **Combinatorics and graph theory, Banach Center Publications, Vol. 25, Vol. PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw 1989**].

E. Jucovič priniesol do KOKOSu aj tematiku najdlhších kružníc v polyedrálnych grafoch svojou prácou s H. Waltherom [*Über längste Kreise in flächenregularen polyedergraphen*, **Mat. Čas. 23 (1973), 164 – 169**]. Bolo preto prirodzené skúmať správanie sa najdlhších kružníc aj v grafoch mnohostenov s dvomi typmi hrán. S. Jendroľ a P. Mihók dokázali, že všetky polyedrálne 3-regulárne mnohosteny, ktorých každá hrana inciduje s dvomi 5-stenami alebo s jednou 5-stenou a jednou 12-stenou sú hamiltonovské (viď [*On a class of Hamiltonian polytopes*, **Discrete Math. 71 (1988), 233 – 241**]). Táto problematika oslovila aj viacerých kolegov v zahraničí, ktorí o nej napísali niekoľko prác. Boli to najmä naši neskorší priatelia P. J. Owens z Anglicka a nemeckí kolegovia J. Harant a H. Walther, ktorí s M. Tkáčom uverejnili ďalšie práce (pozri napr. [*5-regular 3-polytopal graphs with edges of only two types and shortness exponents less than one*, **Discrete Math. 150 (1996), 143 – 153**]). Zaujímavé výsledky o najdlhších kružniciach v trojuholníkových resp. štvoruholníkových mnohostenoch s dvomi typmi hrán publikovali S. Jendroľ a R. Kekeňák ([*Longest circuits in triangular and quadrangular 3-polytopes with two types of edges*, **Math. Slovaca 40 (1990), 341 – 357**]) a v päťuholníkových mnohostenoch S. Jendroľ a P. J. Owens ([*Pentagonal 3-polytopal graphs with edges of only two types and shortness parameters*, **Discrete Math. 137 (1995), 251 – 236**]).

Príbuznou problematikou je štúdium konvexných mnohostenou s predpísanými váhami (t.j. súčtami stupňov incidentných vrcholov) stien. V práci [M. Horňák, J. Ivančo, *On the number of 3-polytopes with constant face weight*, **Studia Sc. Math. Hungarica 39 (2002), 1 – 19**] sú nájdené mohutnosti množín konvexných mnohostenov s konštantnou váhou všetkých stien.

5.10 Chemické grafy

Raný rozvoj teórie grafov ako matematickej disciplíny bol priamo spätý s aplikáciami v chémii: myšlienka reprezentovať molekuly chemických zlúčenín ako grafy (kde vrcholy zodpovedajú atómom a hrany jednoduchým, resp. násobným väzbám medzi nimi) sa objavila už v prácach A. Cayleyho v 19. storočí (v súvislosti s počítaním počtu izomérov acyklických uhľovodíkov – alkánov). Neskôr (cca od polovice 20. storočia) sa objavujú práce preukazujúce silnú koreláciu medzi mnohými fyzikálno-chemickými vlastnosťami organických zlúčenín a invariantami vzťahujúcimi sa ku grafom molekúl daných zlúčenín; toto vyústilo do samostatnej matematickej disciplíny – chemickej teórie grafov. S rozvojom nových možností syntézy chemických látok sa pozornosť chemikov upriamila tiež na prípravu a výskum vlastností organických molekúl s tvarmi konvexných mnohostenov. Táto téma sa ukázala byť veľmi horúcou najmä v súvislosti s objavom nových foriem uhlíka – molekuly C_{60} (za čo bola v r. 1995 udelená Nobelova cena) a následne ďalších podobných molekúl tzv. fullerénov. Tieto štruktúry sú vlastne kubické mnohosteny, ktoré majú presne 12 päťuholníkových stien a ostatné steny sú šesťuholníky. Ich grafy majú (v porovnaní s inými rovinnými grafmi) viacero pekných vlastností, napr. obsahujú perfektné spárenie – množinu hrán M takú, že žiadne dve hrany z M nemajú spoločný vrchol a každý vrchol inciduje s nejakou hranou z M (v molekule zodpovedajú dvojitým väzbám medzi uhlíkovými atómami). Jeden z najatraktívnejších problémov týkajúcich sa grafov fullerénov však bola otázka existencie hamiltonovskej kružnice; bola pritom špeciálnym prípadom domnienky Goodeyho a Barnetta zo 70-tych rokov 20. storočia, podľa ktorej sú všetky kubické 3-súvislé rovinné grafy so stenami veľkosti najviac 6 hamiltonovské. Pozitívna odpoveď na túto otázku by značne uľahčila klasifikáciu a porovnávanie rozličných fullerénov. Cesta k dôkazu hypotézy viedla cez štúdium najdlhších kružníc v polyedrálnych grafoch, s ktorým mali členovia Košickej školy už predchádzajúce bohaté skúsenosti. Prvý výrazný prielom sa podaril S. Jendroľovi a P. J. Owensovi: v článku [*Longest cycles in generalized Buckminsterfullerene graphs*, **J. Math. Chem. 18 (1995), 83 – 90**] (na matematickú prácu pomerne rýchlo uverejnenom) dokázali, že každý fullerén obsahuje kružnicu, na ktorej leží aspoň 80% atómov uhlíka. Po sérii následných vylepšení tohto výsledku sa napokon F. Kardošovi podarilo horeuvedenú domnienku dokázať v [F. Kardoš, *A computer-assisted proof of Barnette-Goodey conjecture: Not only fullerene graphs are Hamiltonian*, **SIAM J. Discrete Math.34 (1) (2020), 62 – 100**]; dôkaz spočíva v postupnej transformácii grafu fullerénu a jeho redukcii do stavu, kde bolo postačujúce použiť počítačové prehľadávanie možností vzájomného usporiadania stien veľkosti ostro menšej ako 6 na lokálne overenie požadovaných globálnych vlastností príslušných grafov.

Nárast všeobecného záujmu o problematiku matematických vlastností fullerénov a im príbuzných mnohostenov priniesol tiež záujem o skoršiu prácu [S. Jendroľ, *On face-vectors of trivalent convex polyhedra*, **Math. Slovaca 33 (1983), 165 – 185**]. Neskôr sa podarilo kladne vyriešiť otázku z teoretickej chémie o možnej existencii kubického fulleroidu, t.j. mnohostena, ktorý obsahuje len päťuholníkové a *n*-uholníkové steny a naviac má grupu symetrií izomorfnú s rotačnou grupou symetrií dvadsaťstena (angl. icosahedron), viď [S. Jendroľ, M. Trenkler, *More icosahedral fulleroids*, **J. Math. Chem. (2001)**]. Pokračujúc vo výskume možných grúp symetrií fulleroidov, S. Jendroľ a F. Kardoš publikovali prácu [*On octahedral fulleroids*, **Discrete Appl. Math. 155 (2007), 2181 – 2186**]; následne dostali pozvanie napísať kapitolu do monografického diela o fullerénoch a fulleroidoch. Výsledkom ich spoločnej práce bola kapitola [S. Jendroľ, F. Kardoš, *Symmetry of fulleroids*, in: **Handbook of Nanophysics (K. D. Sattler) Taylor & Francis Publishers (CRC Press), Boca Raton 2010, Chapter 28, 1 – 13**].

5.11 Dlhé kružnice v polyedrálnych grafoch

Je známe, že polyedrálne grafy nielenže nemusia byť hamiltonovské, ale ich najdlhšie kružnice môžu mať – vzhľadom na počet vrcholov grafu – iba sublineárnu dĺžku. Prirodzene sa preto venovala pozornosť skúmaniu dodatočných podmienok, za ktorých možno v polyedrálnych grafoch nájsť kružnice lineárnej dĺžky. Jednou z takýchto podmienok je požiadavka na špecifické vlastnosti minimálnych množín vrcholov (tzv. vrcholových rezov), ktorých odstránenie porušuje súvislosť grafu. Definovaná je nasledovne: planárny 3-súvislý graf G je **esenciálne 4-súvislý**, ak pre každý jeho vrcholový 3-rez S platí, že jeden z komponentov grafu $G - S$ získaného z G odobratím všetkých vrcholov S pozostáva z jediného vrchola. I. Fabrici, J. Harant a S. Jendroľ – nadväzujúc na predchádzajúcu dlhoročnú úspešnú spoluprácu Košickej školy s výskumnou skupinou na Technische Universität Ilmenau, Nemecko – v práci [*On longest cycles in essentially 4-connected planar graphs*, **Discuss. Math. Graph Theory 36 (2016), 565 – 575**] obnovili štúdium najdlhších kružníc v esenciálne 4-súvislých polyedrálnych grafoch vylepšením dovtedajších dolných ohraničení ich dĺžok. Ukázali, že dĺžka takejto kružnice je aspoň $\frac{1}{2}(n + 4)$ vo všeobecnosti, resp. aspoň $\frac{13}{21}(n + 4)$ ak G je n-vrcholový maximálny planárny graf. Neskôr I. Fabrici, J. Harant, S. Mohr a J. M. Schmidt v článku [*Circumference of essentially 4-connected planar triangulations*, **J. Graph Algorithm Appl. 25 (2021), 121 – 132**] vylepšili tento odhad na $\frac{2}{3}(n+4)$ (tento odhad je tesný). Tí istí autori dokázali v práci [*Longer cycles in essentially 4-connected planar graphs*, **Discuss. Math. Graph Theory 40 (2020), 269 – 277**], že esenciálne 4-súvislý planárny graf na n vrcholoch obsahuje kružnicu dĺžky aspoň $\frac{3}{5}(n+2)$, ktorú navyše v grafe možno nájsť v čase $O(n^2)$.

V poslednom období sa tiež v prostredí Košickej školy skúmali grafy, ktoré nie sú hamiltonovské, avšak z pohľadu dĺžok najdlhších kružníc k nim majú veľmi blízko. Ide o tzv. hypohamiltonovské grafy, z ktorých odstránením ľubovoľného vrchola vždy vznikne hamiltonovský graf. I. Fabrici, T. Madaras a M. Timková v práci [*Forbidden configurations for hypohamiltonian graphs*, **Opuscula Mathematica 38(3) (2018), 357 – 377**] priniesli rozsiahly zoznam zakázaných konfigurácií pre hypohamiltonovské grafy; neskôr v spolupráci s kolegami z Ghent University v Belgicku v článku [I. Fabrici, T. Madaras, M. Timková, N. Van Cleemput, C. T. Zamfirescu, *Non-hamiltonian graphs in which every edge-contracted subgraph is hamiltonian*, **Applied Mathematics and Computation 392 (2021) 125714**] iniciovali štúdium vlastností celkom novej triedy tzv. perihamiltonovských grafov (t.j. nehamiltonovských grafov takých, že kontrakciou každej ich hrany vznikne hamiltonovský graf).

Spolupráca s výskumnou skupinou z TU Ilmenau, Nemecko priniesla tiež zaujímavé výsledky o dlhých kružniciach prechádzajúcich cez predpísané vrcholy v grafoch. V článku [J. Harant, S. Jendroľ, H. Walther, *On long cycles through four prescribed vertices of a polyhedral graph*, **Discuss. Math. Graph Theory 28 (2008), 441 – 451**] je dokázané, že

> ak 3-súvislý rovinný graf G obsahuje najdlhšiu kružnicu dĺžky $c \geq 44$, tak má aj kružnicu dĺžky aspoň $\frac{1}{36}c + \frac{20}{3}$ prechádzajúcu cez akékoľvek štyri vrcholy G.

5.12 Cyklické zafarbenia rovinných grafov

Známy problém štyroch farieb a snahy o jeho vyriešenie motivovali matematikov od druhej polovice 20. storočia ku skúmaniu zafarbení rovinných grafov, ktoré by zovšeobecnili klasické regulárne zafarbenie, pričom v prípade rovinných triangulácií by viedli k žiadanému vrcholovému 4-zafarbeniu. Takto Ore a Plummer v r. 1969 zaviedli cyklické zafarbenie rovinného grafu ako také zafarbenie jeho vrcholov, pri ktorom žiadne dva vrcholy patriace tej istej stene nemajú rovnakú farbu; k tomu definovali pojem cyklického chromatického čísla rovinného grafu ako minimálny počet farieb, ktorými sa dá rovinný graf cyklicky zafarbiť.

Plummer s Toftom v práci [M. D. Plummer, B. Toft, *Cyclic coloration of 3-polytopes*, **Journal of Graph Theory 11 No. 4 (1987), 507 – 515**] sformulovali hypotézu, podľa ktorej by cyklické chromatické číslo 3-súvislého rovinného grafu G nemalo presiahnuť maximálny stupeň steny v grafe G o viac než 2. V práci [H. Enomoto, M. Horňák, S. Jendroľ, *Cyclic chromatic number of 3-connected plane graphs*, **SIAM Journal on Discrete Mathematics 14 No. 1 (2001), 121 – 137**] autori dokázali, že ak maximálny stupeň steny v 3-súvislom rovinnom grafe G je $\Delta^* \geq 60$, tak cyklické chromatické číslo grafu G neprevyšuje $\Delta^* + 1$. Ide o absolútny, teda vo všeobecnosti nezlepšiteľný výsledok (keďže graf Δ^*-bokého ihlana túto hranicu pre počet farieb dosahuje). Čo sa týka hypotézy Plummera a Tofta, najprv M. Horňák a S. Jendroľ v práci [*On a conjecture by Plummer and Toft*, **J. Graph Theory 30 (1999), 177 – 189**] dokázali jej platnosť pre $\Delta^* \geq 24$, potom v práci [M. Horňák, J. Zlámalová, *Another step towards proving a conjecture by Plummer and Toft*, **Discrete Mathematics 310 No. 3 (2010), 442 – 452**] autori prispeli k jej vyriešeniu analýzou prípadov, keď maximálny stupeň steny v grafe G je $\Delta^* \geq 18$. Momentálne je hypotéza dokázaná pre prípad $\Delta^* = 3$ (Four Colour Theorem), $\Delta^* = 4$ [O. V. Borodin, *Solution of the Ringel problem on vertex-face coloring of plane graphs and coloring of 1-planar graphs*, **Metody diskretnogo analiza 41 (1984), 12 – 26**] a $\Delta^* \geq 16$ [Z. Dvořák, M. Hebdige, F. Hlásek, D. Kráľ, J. A. Noel, *Cyclic coloring of plane graphs with maximum face size 16 and 17*, E**uropean Journal of Combinatorics 94 (2021) 103287**]. J. Zlámalová v práci [*A note on cyclic chromatic number*, **Discuss. Math. Graph Theory 30 (2010), 115 – 122**] dokázala platnosť hypotézy pre

3-súvislé rovinné grafy s $\Delta^* \geq 6$ a minimálnym vrcholovým stupňom $\delta(G) \geq 4$, resp. s minimálnym vrcholovým stupňom $\delta(G) \geq 5$.

Doposiaľ najlepší výsledok pre 3-súvislé rovinné grafy vo všeobecnosti je obsiahnutý v práci [H. Enomoto, M. Horňák, *A general upper bound for the cyclic chromatic number of 3-connected plane graphs*, **Journal of Graph Theory 62 No. 1 (2009), 1 – 25**]: ich cyklické chromatické číslo je nanajvýš $\Delta^* + 5$.

Pokiaľ ide o súvislé rovinné grafy, O. V. Borodin v r. 1984 vyslovil hypotézu, že cyklické chromatické číslo súvislého rovinného grafu je najviac $\left\lfloor \frac{3\Delta^*}{2} \right\rfloor$, ak $\Delta^* \geq 3$. Táto hypotéza je známa ako **Cyclic Coloring Conjecture**. Aktuálny stav riešenia tejto hypotézy, uvedený spolu s čiastočnými či približnými riešeniami je obsahom nedávnej publikácie [S. Jendroľ, R. Soták, *On the cyclic coloring conjecture*, **Discrete Math. 344 (2021) 112204**].

5.13 Faciálne zafarbenia rovinných grafov

Definície viacerých špecifických zafarbení grafov (ktorých špeciálnymi prípadmi sú štandardné regulárne zafarbenia) sa opierajú o farebné vlastnosti ciest v zafarbenom grafe. V prípade rovinných grafov možno uvažovať obmeny týchto zafarbení tým, že sa do definície nezahrnie množina všetkých ciest v grafe, ale len tzv. **faciálnych ciest**, t.j. ciest, ktoré sú časťou hraničného sledu nejakej steny, pričom každá dvojica po sebe idúcich hrán cesty je súsledná na stene, ktorú hraničný sled vymedzuje. V rámci Košickej školy diskrétnej matematiky bolo iniciované štúdium celého radu problémov motivovaných farebnými vlastnosťami faciálnych ciest, resp. faciálnych sledov. Podrobnejšie o nich sa možno dozvedieť v prehľadových prácach [J. Czap, S. Jendroľ, *Facially-constrained colorings of a plane graphs*: **A survey, Discrete Math. 340 (2017), 2691 – 2703**] a [J. Czap, M. Horňák, S. Jendroľ, *A survey on the cyc-*

lic coloring and its relaxations, **Discuss. Math. Graph Theory 41 (2021), 5 – 38**]. Nižšie si pripomenieme len zopár najkrajších výsledkov o faciálnych zafarbeniach rovinných grafov, ktoré sú výsledkom snaženia viacerých reprezentantov Košickej školy diskrétnej matematiky.

5.13.1 *Faciálne zoznamové zafarbenie rovinných grafov*

Nech $G = (V, E, F)$ je súvislý rovinný graf s vrcholovou množinou V, hranovou množinou E a stenovou množinou F. Pre $X \in \{V, E, F, V \cup E, V \cup F, E \cup F, V \cup E \cup F\}$, dva rôzne prvky z X sú faciálne susedné v G, ak sú to susedné vrcholy, susedné steny, incidentné prvky grafu alebo faciálne susedné hrany. Zoznamové k-zafarbenie je faciálne vzhľadom na X, ak existuje zoznamové zafarbenie prvkov z X také, že faciálne susedné prvky z X získajú (každý zo svojho zoznamu farieb, ktorý má dĺžku k) rôzne farby. V práci [I. Fabrici, S. Jendroľ, M. Voigt, *Facial list colourings of plane graphs*, **Discrete Math. 339 (2016), 2826 – 2831**] je dokázané, že každý rovinný graf $G = (V, E, F)$ má faciálne zoznamové 4-zafarbenie vzhľadom na $X = E$, faciálne zoznamové 6-zafarbenie vzhľadom na $X \in \{V \cup E, E \cup F\}$ a faciálne zoznamové 8-zafarbenie vzhľadom na $X = V \cup E \cup F$. Pre rovinné triangulácie je každý z týchto výsledkov vylepšený o jedna a je tesný. Tieto výsledky dopĺňajú Thomassenovu vetu, že každý rovinný graf má zoznamové 5-zafarbenie vzhľadom na $X \in \{V, F\}$ a vetu Wanga a Liha, že každý jednoduchý rovinný graf má zoznamové 7-zafarbenie vzhľadom na $X = V \cup F$.

V práci [J. Grytczuk, S. Jendroľ, M. Zając, *Graph polynomials and paintability of plane graphs*, **Discrete Appl. Math. 313 (2022), 71 – 79**] sú tieto výsledky ešte vylepšené v zmysle, že horeuvedené konštanty zhora ohraničujú nielen faciálnu voliteľnosť uvažovaných grafov, ale aj ich Alonovo-Tarsiho číslo (ktoré samo osebe tvorí horný odhad voliteľnosti grafu).

5.13.2 *Faciálne nerepetitívne zafarbenia*

Hranové zafarbenie rovinného grafu G sa nazýva **faciálne nerepetitívne**, ak v G neexistuje faciálna cesta taká, že jej prvá polovica je zafarbená tou istou postupnosťou farieb ako jej druhá polovica. Tento druh zafarbenia bol inšpirovaný nerepetitívnym hranovým zafarbením, ktoré zaviedli na začiatku milénia N. Alon, J. Grytczuk a kol. ako koncept zovšeobecňujúci známe Thueove postupnosti (tieto zodpovedajú nerepetitívnym zafarbeniam ciest). V [F. Havet, S. Jendroľ, R. Soták, E. Škrabuľáková, *Facial non-repetitive edge coloring of plane graphs*, **J. Graph Theory 66 (2010), 38 – 48**] je dokázané, že každý strom má faciálne hranové nerepetitívne zafarbenie 4 farbami, každý súvislý multigraf 8 farbami, každý jednoduchý 3-súvislý rovinný graf resp. každý hamiltonovský rovinný graf 7 farbami.

Analogicky (v práci [J. Harant, S. Jendroľ, *Nonrepetitive vertex colorings of graphs*, **Discrete Math. 312 (2012), 374 – 380**]) je definovaná vrcholová verzia faciálneho nerepetitívneho zafarbenia. J. Barát a J. Czap dokázali v [*Facial nonrepetitive vertex coloring of plane graph*, **J. Graph Theory 74 (2013), 115 – 121**], že každý rovinný graf má vrcholové faciálne nerepetitívne zafarbenie najviac 24 farbami.

5.13.3 *Faciálne zafarbenia s jedinečným maximom*

Vrcholové zafarbenie rovinného grafu G s jedinečným maximom je také zafarbenie, že pre každú stenu f v G sa farba s najvyššou číselnou hodnotou vyskytne práve na jednom vrchole f. I. Fabrici a F. Göring v [*Unique-maximum coloring of plane graphs*, **Discuss. Math. Graph Theory 36 (2016), 95 – 102**] dokázali, že každý rovinný graf má takéto vrcholové zafarbenie najviac 3 farbami resp. najviac 6 farbami v prípade, že sa žiada regulárnosť zafarbenia. Vyslovili tiež hypotézu, že hranica 6 by sa mohla znížiť na 4 (čo by znamenalo zosilnenie vety o štyroch farbách). Následne A. Wendland v [*Coloring of plane graphs with unique maximal color on faces*, **J. Graph Theory**

83 (2016), 359 – 371] vylepšil Fabriciho a Göringovu hranicu o 1 a zanedlho nato B. Lidický, K. Messerschmidt, R. Škrekovski [*A counterexample to a conjecture on facial unique-maximal colorings*, **Discrete Appl. Math. 237 (2018), 123 – 123**] skonštruovali príklad rovinného grafu, ktorý ukázal, že hranica 5 je vo všeobecnosti tesná.

Pre hranovú a totálnu verziu zafarbenia s jedinečným maximom I. Fabrici, M. Horňák a S. Rindošová v [*Facial unique-maximum edge and total colouring of plane graphs*, **Discrete Appl. Math. 291 (2021), 171 – 179**] ukázali, že každý 2-hranovo-súvislý graf je faciálne 4-hranovo a 6-totálne-zafarbiteľný vzhľadom na podmienku jediného maxima; hranice 4 a 6 sú tesné. Pre zoznamovú verziu týchto zafarbení súvislých rovinných grafov je v uvedenom článku dokázané, že príslušné zafarbenia existujú, ak sa farby vyberajú zo zoznamov dĺžok 6, resp. 8.

5.13.4 *Faciálne zafarbenia s nepárnym výskytom farieb na stenách*

Faciálne nepárne vrcholové (resp. hranové) zafarbenie 2-súvislého rovinného grafu G je také zafarbenie jeho vrcholov (resp. jeho hrán), že na každej stene sa každá tam vyskytujúca farba vyskytuje nepárny počet krát. V [J. Czap, S. Jendroľ, M. Voigt, *Parity vertex coloring of plane graphs*, **Discrete Math. 311 (2011), 512 – 520**] bolo dokázané, že každý rovinný 2-súvislý graf má nepárne vrcholové zafarbenie 118 farbami. Hranica 118 bola znížená na 97 v práci [T. Kaiser, D. Kráľ, M. Stehlík, R. Škrekovski, *Strong parity vertex coloring of plane graphs*, **Discrete Math. Theor. Comput. Sci. 16 (2014), 143 – 158**], avšak stále čaká na vylepšenie (i keď pre viaceré špeciálne triedy rovinných grafov táto hranica bola zlepšená podstatným spôsobom).

V prípade faciálneho hranového zafarbenia 2-súvislých rovinných grafov je situácia sľubnejšia. V práci [J. Czap, S. Jendroľ, F. Kardoš, R. Soták, *Facial parity edge colouring of plane pseudographs*, **Discrete Math. 312 (2012), 2735 – 2740**] je dokázané, že pre hranovo 4-súvislé rovinné grafy stačí 9 farieb, v prípade hranovo 3-súvislých grafov stačí 12 farieb a pre hranovo 2-súvislé stačí 20 farieb. Hranica 20 pre hranovo 2-súvislé grafy bola neskôr vylepšená na 16 v práci [B. Lužar, R. Škrekovski, *Improved bound on facial parity edge coloring*, **Discrete Math. 313 (2013), 2218 – 2222**]; veľmi čerstvý článok K. Štorgela z r. 2023 uvádza príklad grafov, ktoré pre takéto zafarbenie potrebujú 12 farieb.

5.13.5 *Faciálne bezanagramové hranové zafarbenia*

Postupnosť $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ sa nazýva **anagram**, ak postupnosť $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}$ je permutáciou postupnosti $a_1, a_2, \dots, a_n$. Postupnosť S sa volá **bezanagramová**, ak žiadna podpostupnosť za sebou idúcich členov S nie je anagram. Zafarbenie hrán daného rovinného grafu G sa volá faciálne bezanagramové, ak postupnosť farieb na hranách žiadneho stenového ťahu netvorí anagram. V práci [J. Czap, S. Jendroľ, R. Soták, *Facial anagram-free edge-coloring of plane graphs*, **Discrete Appl. Math. 230 (2017), 151 – 155**] je ukázané, že každý súvislý rovinný graf G má faciálne bezanagramové hranové zafarbenie 11 farbami. Naviac, ak G je 3-súvislý rovinný graf, tak na uvedené zafarbenie stačí 9 farieb.

5.13.6 *Krátke monochromatické faciálne cesty*

Slávna veta o štyroch farbách hovorí, že každý rovinný graf sa dá zafarbiť 4 farbami tak, že každé dva susedné vrcholy získajú rôzne farby (a teda monochromatické faciálne cesty sú len jednovrcholové). V práci [J. Czap, I. Fabrici, S. Jendroľ, *Coloring of plane graphs without long monochromatic facial paths*, **Discuss. Math. Graph Theory, 41 (2021), 801 – 818**] je ukázané, že pomocou troch (resp. dvoch) farieb je možné vrcholy každého rovinného grafu zafarbiť tak, že každá najdlhšia faciálna monochromatická cesta má najviac tri (resp. štyri) vrcholy. Autori práce sa domnievajú, že každý rovinný graf možno zafarbiť danými počtami farieb tak, že najdlhšie faciálne monochromatické cesty majú najviac dva (resp. tri) vrcholy.

5.14 Paletové zafarbenia všeobecných grafov

Paleta vrchola v pri regulárnom zafarbení hrán grafu G (ktorého žiadny komponent nie je kompletný 2-vrcholový graf K_2 a nanajvýš jeden komponent je kompletný 1-vrcholový graf K_1) je množina farieb hrán incidentných s v. **Pozorovateľnosť** (angl. observability) grafu G je minimálny počet farieb v regulárnom zafarbení hrán G, ktoré má tú vlastnosť, že akékoľvek dva rôzne vrcholy G majú rôzne palety. Tento pojem zaviedli J. Černý, M. Horňák, R. Soták v práci [*Observability of a graph*, **Mathematica Slovaca 46 No. 1 (1996), 21 – 31**] nezávisle od práce [A. C. Burris, R. H. Schelp, *Vertex-distinguishing proper edge-colorings*, **Journal of Graph Theory 26 No. 2 (1997), 73 – 82**]. Získali v nej hodnoty tohto nového chromatického invariantu pre grafy niektorých jednoduchých tried. V práci [M. Horňák, R. Soták, *Asymptotic behaviour of the observability of* Q_n, **Discrete Mathematics 176 (1997), 139 – 148**] bol nájdený asymptotický výsledok týkajúci sa pozorovateľnosti grafu n-rozmernej kocky v závislosti od hodnoty rozmeru n.

Susedov rozlišujúci index (angl. neighbour-distinguishing index) grafu G (neobsahujúceho K_2 ako komponent) je najmenší počet farieb v takom regulárnom zafarbení hrán G, že akékoľvek dva susedné vrcholy G majú rôzne palety. Tento invariant bol definovaný v práci [Z. F. Zhang, L. Z. Liu, J. F. Wang, *Adjacent strong edge colorings of graphs*, **Applied Mathematics Letters 15 No. 5 (2002), 623 – 626**], kde autori taktiež sformulovali hypotézu, podľa ktorej by jeho hodnota nemala prevyšovať maximálny stupeň Δ grafu G o viac než dva, ak každý komponent súvislosti G má aspoň šesť vrcholov. V práci [K. Edwards, M. Horňák, M. Woźniak, *On the Neighbour-Distinguishing Index of a Graph*, **Graphs and Com-**

binatorics 22 No. 3 (2006), 341 – 350] je dokázané, že ak G je planárny bipartitný graf s maximálnym stupňom $\Delta \geq 12$, tak susedov rozlišujúci index G je nanajvýš $\Delta+1$. V práci [M. Horňák, D. J. Huang, W. F. Wang, *On Neighbor-Distinguishing Index of Planar Graphs*, **Journal of Graph Theory 76 No. 4 (2014), 262 – 278**] autori ukázali, že hypotéza Zhang-Liu-Wang platí pre planárne grafy s maximálnym stupňom aspoň 12.

Paletový index (angl. palette index) grafu G je minimálny počet paliet v akomkoľvek regulárnom zafarbení hrán G. Pojem prvýkrát zaviedli M. Horňák, R. Kalinowski, M. Meszka a M. Woźniak v práci [*Minimum Number of Palettes in Edge Colorings*, **Graphs and Combinatorics 30 No. 3 (2014), 619 – 626**], kde okrem iného stanovili hodnoty tohto grafového invariantu pre všetky kompletné grafy.

5.15 Silné hranové zafarbenia

P. Erdős a J. Nešetřil v r. 1985 navrhli študovať silné hranové zafarbenie grafu G ako regulárne zafarbenie hrán, v ktorom každá farebná množina hrán indukuje spárenie. Úlohou je nájsť silný chromatický index G, teda minimálny počet farieb potrebných na jeho silné hranové zafarbenie. Tento problém je stále živý s mnohými otvorenými otázkami. Aj v KOKOSe sme sa mu venovali. V práci [D. Hudák, B. Lužar, R. Soták, R. Škrekovski, *Strong edge-coloring of planar graphs*, **Discrete Math. 324 (2014), 41 – 49**] sú nájdené horné odhady silného chromatického indexu pre viaceré množiny rovinných grafov. Práca hneď upútala pozornosť, databáza Scopus na ňu doposiaľ eviduje 24 citácií. Aj nedávna práca [B. Lužar, E. Máčajová, M. Škoviera, R. Soták, *Strong edge-coloring of graphs and covers of Kneser graphs*, **J. Graph Theory 100 (2022), 686 – 697**], ktorá rieši ten istý problém pre Kneserove grafy, už zaznamenala 7 citácií.

V čerstvej práci [B. Lužar, M. Mockovčiaková, R. Soták, *Revisiting semistrong edge-coloring of graphs*, **J. Graph Theory**

(**2023**)**, 1 – 21**] je študované hranové zafarbenie motivované silným hranovým zafarbením, kde podmienka na zafarbenie je oslabená tak, aby každá hrana každej farebnej množiny mala v podgrafe indukovanom touto množinou hrán stupeň jedna.

5.16 Hviezdicové hranové zafarbenia

Hviezdicové hranové zafarbenie (angl. star edge coloring) je regulárne zafarbenie hrán bez dvojfarebných ciest a kružníc dĺžky 4. V práci [L. Bezegová, B. Lužar, M. Mockovčiaková, R. Soták, R. Škrekovski, *Star edge coloring of some classes of graphs*, **J. Graph Theory 81** (**2016**)**, 73 – 83**] sú nájdené tesné horné ohraničenia na počet farieb hviezdicových zafarbení pre stromy a subkubické grafy a odvodené horné ohraničenie pre rovinné grafy, ktorých všetky vrcholy ležia na vonkajšej stene. O jej kvalite svedčí, že Scopus na ňu eviduje 31 citácii. Aj ďalšia práca o tejto problematike, [B. Lužar, M. Mockovčiaková, R. Soták, *Note on list star edge-coloring of subcubic graphs*, **J. Graph Theory 90** (**2019**)**, 304 – 310**] zaznamenala 10 citácií. Týka sa zoznamovej verzie hviezdicového indexu subkubických grafov; je v nej dokázané, že tento index je najviac 7, čím je zodpovedaná otázka z práce [Z. Dvořák, B. Mohar, R. Šámal, *Star chromatic index*, **J. Graph Theory 72** (**2013**)**, 313 – 326**].

V rámci KOKOSu vznikla aj práca [P. Holub, B. Lužar, E. Mihaliková, M. Mockovčiaková, R. Soták, *Star edge-coloring of square grids*, **Applied Mathematics and Computations 392** (**2021**) **125741**] študujúca hviezdicové zafarbenia štvorcových mriežok.

5.17 Homogénne grafové zafarbenia

V posledných rokoch publikoval prof. Madaras (v spoluautorstve so svojimi doktorandmi M. Šurimovou a A. Onderkom) taktiež niekoľko prác súvisiacich s chromatickou teóriou grafov, v ktorých študovali rozličné varianty tzv. homogénnych grafových zafarbení. Ide o vrcholové či hranové zafarbenia (vo všeobecnosti nie nutne regulárne) s dodatočnou podmienkou rovnakého počtu farieb na špecificky vymedzených podgrafoch grafu. Medzi také môžu patriť napr. maximálne hviezdy (a im prislúchajúce zovšeobecnenia bipartitných regulárnych zafarbení, skúmané v prácach [M. Janicová, T. Madaras, R. Soták, B. Lužar: *From NMNR-coloring of hypergraphs to homogenous coloring of graphs*, **Ars Mathematica Contemporanea 12(2) (2017), 351 – 360**] a [T. Madaras, M. Šurimová, *Homogeneous colourings of graphs*, **Mathematica Bohemica 148(1) (2023), 105 – 115**]) či stenové kružnice v rovinných grafoch (pozri [T. Madaras, M. Šurimová, *Facial homogeneous colouring of graphs*, **Symmetry 13(7) (2021) 1213**]). Hranové obmeny týchto zafarbení boli skúmané len veľmi nedávno v [J. Czap, S. Jendroľ, T. Madaras, *Facial visibility in edge colored plane graphs*, **Graphs and Combinatorics 38(1) (2022) 4**] a v [T. Madaras, A. Onderko, T. Schweser, *Edge homogeneous colorings*, **Opuscula Mathematica 42(1) (2022), 65 – 73**].

5.18 Zovšeobecnené zafarbenia grafov a dedičné vlastnosti

Jednou z významných tém študovaných v rámci Košického kombinatorického seminára boli dedičné vlastnosti grafov. Ide o systematický prístup k zovšeobecneným zafarbeniam grafov, ktoré sú motivovaného základnou definíciou:

Nech $G = (V(G), E(G))$ je graf a k je fixovaná konštanta. Regulárne vrcholové k-zafarbenie grafu G je také priradenie farieb z množiny $1, 2, \ldots, k$ vrcholom grafu, pri ktorom susedné vrcholy dostanú rôzne farby.

Každé takéto zafarbenie indukuje rozklad množiny vrcholov $V(G)$ grafu G na monochromatické disjunktné podmnožiny. Nijaké dva vrcholy tej istej farby nie sú spojené hranou, preto každá z množín je nezávislá (ňou indukovaný graf je bez hrán). Je prirodzené klásť si otázku, čo sa zmení, ak vlastnosť „byť nezávislý“ nahradíme nejakou inou špecifickou vlastnosťou.

Vlastnosťou grafu nazývame akúkoľvek neprázdnu množinu navzájom neizomorfných grafov. Vlastnosť sa nazýva **dedičná**, ak je uzavretá vzhľadom na tvorbu podgrafov, t. j. s každým grafom patria do dedičnej vlastnosti aj všetky jeho podgrafy. Vlastnosť sa nazýva **aditívna**, ak je uzavretá vzhľadom na disjunktné zjednotenie grafov. Aditívnou a dedičnou vlastnosťou grafov je napríklad množina grafov s maximálnym stupňom Δ, zatiaľ čo vlastnosť „byť úplným grafom“ (ľubovoľné dva vrcholy sú spojené hranou) nie je ani dedičná, ani aditívna. Dedičné vlastnosti grafov sa dajú charakterizovať pomocou minimálnych zakázaných podgrafov a maximálnych dovolených grafov, čo umožňuje ďalšie zovšeobecnenia.

Štúdiu dedičných vlastností sa začal venovať P. Mihók už vo svojej dizertačnej práci *„Grafy kritické vzhľadom na svoje charakteristiky“*. Pod jeho vedením vznikla diplomová práca [J. Vronka, *Vertex sets of graphs with prescribed properties*, **P.J. Šafárik University, Košice, 1986 (in Slovak)**], ktorá je jedným z prvých príspevkov k hypotéze známej ako **Path Partition Conjecture**, ktorá je dodnes vyriešená iba pre špeciálne prípady. Zaujímavosťou je, že táto práca je citovaná v mohých príspevkoch na túto tému. Jedným z košických príspevkov v tejto oblasti je práca [P. Katrenič, G. Semanišin, *A note on the Path Kernel Conjecture*, **Discret. Math. 309 (2009), 2551 – 2554**], ktorá vylepšuje výsledok C. Thomassena.

Podobnej problematike ako P. Mihók sa začal venovať aj Jaroslav Ivančo, ktorý študoval systémy nezávislosti. Na podnet M. Borowieckeho začali pracovať na prvej prehľadovej práci o dedičných vlastnostiach grafov, ktorá nakoniec vyšla iba v okliešenej verzii: [M. Borowiecki and P. Mihók, *Hereditary properties of graphs*, in: **V.R. Kulli, ed., Advances in Graph Theory (Vishwa International Publication, Gulbarga, 1991), 41 – 68**].

Príkladom výsledku o štruktúre regulárneho zafarbenia je elegantné zovšeobecnenie známej Brooksovej vety [P. Mihók, *An extension of Brooks'theorem*, **Annals of Discrete Math.**

51 (1992), 235 – 236]. Podobný štrukturálny výsledok bol získaný v neskoršej práci [P. Mihók, I. Schiermeyer, *Cycle lengths and chromatic number of graphs*, **Discret. Math. 286(1-2):(2004), 147 – 149**].

V rámci spoločného výskumu vznikla zaujímavá práca o *k*-degenerovaných grafoch [M. Borowiecki, J. Ivančo, P. Mihók, G. Semanišin, *Sequences realizable by maximal k-degenerate graphs* **J. Grap Theory 19(1):(1995), 117 – 124**].

V roku 1995 sa na konferencii v Krakove stretli P. Mihók, Izak Broere a Mieczysław Borowiecki a naštartovali dlhoročnú plodnú spoluprácu troch výskumných skupín z Košíc, Johanesburgu/Pretórie a Zielonej Góry. Prvým spoločným projektom bol prehľadový článok [M. Borowiecki, I. Broere, M. Frick, P. Mihók, G. Semanišin, *A survey of hereditary properties of graphs*, **Discuss. Math. Graph Theory 17(1): (1997), 5 – 50**], ktorý vyšiel spolu s ďalšími prácami v časopise *Discussiones Mathematicae Graph Theory* a má viac ako 100 citácií. Ten bol postupom času zaradený aj do významným prehľadových databáz Current Content, WoS a Scopus. Jednou z tém, na ktoré bol zameraný boli dedičné vlastnosti grafov.

V roku 1998 sa uskutočnil prvý špecializovaný medzinárodný workshop **Hereditarnia** venovaný problematike dedičných vlastností, ktorý sa následne uskutočnil viac ako dvadsaťkrát.

Štúdium štruktúry zväzu dedičných vlastností viedlo postupne k zavedeniu pojmu **minimálne reducibilné ohraničenie**, ktoré umožňuje porovnávať kvalitu jednotlivých výsledkov týkajúcich sa zovšeobecneného zafarbenia. Prvým výsledkom tohoto typu je [M. Borowiecki, I. Broere, P. Mihók, *Minimal reducible bounds for planar graphs*, **Discrete Math. 212(1-2):(2000), 19 – 27**]. O sile a užitočnosti tohto zovšeobecňujúceho prístupu svedčí aj veľmi pekná a zaujímavá práca [M. Borowiecki, I. Broere, P. Mihók, *Minimal reducible bounds for planar graphs*, **Discrete Math. 21 (2000), 19 – 27**], ktorá dáva hlboký a jednotiaci pohľad na celý rád rôznych výsledkov a problémov o planárnych grafoch. Ďalším príspevkom k systematizácii tohoto konceptu je práca [G. Semanišin, *Minimal reducible bounds for induced-hereditary properties*, **Discret. Math. 286(1-2): (2004), 163 – 170**].

Tento jednotiaci prístup dovoľuje študovať aj rôzne zovšeobecnené grafové invarianty, ako to urobili P. Mihók a G. Semanišin vo svojom článku [*On invariants of hereditary graph properties*, **Discrete Math. 307 (2007), 958 – 963**].

V teórii grafov boli študované aj rôzne spôsoby generovania vlastností. Jeden takýto prístup predstavujú aj univerzálne grafy. Z pohľadu dedičných vlastností sú zaujímavé dva príspevky košickej grafárskej školy [P. Mihók, J. Miškuf, G. Semanišin, *On universal graphs for hom-properties*, **Discuss. Math. Graph Theory 29(2): (2009), 401 – 409**] a [I. Broere, J. Heidema, P. Mihók, *Universality in graph properties with degree restrictions*, **Discuss. Math. Graph Theory 33(3): (2013), 477 – 492**].

Dedičné vlastnosti grafov je možné kombinovať i s modernejšími spôsobmi farbenia grafov, ako je **zlomkové farbenie**: [A. Kemnitz, P. Mihók, M. Voigt, *Fractional (P, Q)-total list colorings of graphs*, **Discuss. Math. Graph Theory 33(1): (2013), 167 – 179**].

5.19 Rozklad dedičných vlastností na ireducibilné faktory

Aditívne dedičné vlastnosti tvoria zväz a zovšeobecnené farbenia sa dajú popísať aj algebraickým jazykom: Nech $P_1, P_2, \dots, P_n$ sú dedičné vlastnosti grafov. Hovoríme, že graf G má vlastnosť $P_1, P_2, \dots, P_n$, ak jeho množinu vrcholov $V(G)$ je možné rozložiť na n množín tak, že podgraf grafu G indukovaný na i-tej množine vrcholov má vlastnosť P_i. Dedičná vlastnosť R sa nazýva **reducibilná**, ak existujú dedičné vlastnosti $P_1, P_2, \dots, P_n$ také, že $R = P_1, P_2, \dots, P_n$; inak sa volá **ireducibilná**. Prirodzene tak vznikajú otázky ohľadom jednoznačnosti rozkladu dedičných vlastností na ireducibilné faktory, čo predstavuje analógiu základnej vety algebry a základnej vety aritmetiky. Dva z otvorených problémov sa objavili aj v renomovanej knihe [T. R. Jensen, B. Toft, *Graph Coloring Problems*, **Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley, New York, 1994, ISBN 0-471-02865-7**]. Riešenie jedného z nich sa nachádza v práci [P. Mihók, G. Semanišin, R. Vasky, *Additive and hereditary properties are uniquelly factorizable into irreducible factors*, **J. Graph Theory 33 (2000), 44 – 53**]: je dokázané, že faktorizácia reducibilnej vlastnosti na ireducibilné faktory je jednoznačná, ak vlastnosť je aditívna.

Problém rozkladu reducibilných vlastností zaujal A. Farrugiu, ktorý rozprúdil diskusiu o viacerých technických a filozofických aspektoch dokázaných tvrdení. Zo vzájomnej spolupráce nakoniec vznikol ešte všeobecnejší výsledok [A. Farrugia, P. Mihók, R. B. Richter, G. Semanišin, *Factorizations and characterizations of induced-hereditary and compositive properties*, **J. Graph Theory 49(1): (2005), 11 – 27**]. Jeden z recenzentov vo svojej recenzii upozornil, že grafy sú v tejto publikácii už len v motivačnej úlohe a celý prístup sa dá aplikovať aj na všeobecnejšie štruktúry. To je aplikované v článku [P. Mihók, G. Semanišin, *Unique factorization theorem for object-systems*, **Discuss. Math. Graph Theory 31 (2011), 559 – 575**] a tiež v oblasti formálnej konceptovej analýzy [P. Mihók, G. Semanišin, *Unique Factorization Theorem and Formal Concept Analysis*, **CLA 2006: 232 – 239**].

5.20 Vybrané problémy algoritmickej teórie grafov

G. Semanišin so svojimi doktorandmi P. Katreničom, F. Galčíkom a J. Katreničom sa neskôr začal venovať aj iným informaticky motivovaným problémom, pričom viackrát bolo pri ich štúdiu možné využiť taktiež poznatky z oblasti dedičných vlastností grafov. Tak vznikli práce [F. Galčík, G. Semanišin, *Maximum Finding in the Symmetric Radio Networks with Collision Detection*, **SOFSEM (1) (2007), 284 – 294**], [F. Galčík, J. Katrenič, G. Semanišin, *On Computing an Optimal Semi-matching*, **Algorithmica 78(3) (2017), 896 – 913**], [J. Katrenič,

I. Schiermeyer, *Improved approximation bounds for the minimum rainbow subgraph problem*, **Inf. Process. Lett. 111(3): (2011), 110 – 114**] a [F. Galčík, J. Katrenič, *A note on approximating the b-chromatic number*, **Discret. Appl. Math. 161(7-8) (2013), 1137 – 1140**].

V rámci slovensko-slovinskej spolupráce vznikla séria prác, ktorá sa týkala *k*-cestného vrcholového pokrytia, t. j. nájdenia minimálneho počtu vrcholov v grafe, ktoré treba ofarbiť, aby v zostávajúcom grafe neexistovali nijaké cesty rádu k. Tento nový pojem úzko súvisí s problematikou návrhov bezpečných komunikačných protokolov v bezdrôtových sieťach.

Veľký ohlas zaznamenala najmä práca [B. Brešar, F. Kardoš, J. Katrenič, G. Semanišin, *Minimum k-path vertex cover*, **Discret. Appl. Math. 159(12) (2011), 1189 – 1195**]. Táto práca doteraz zaznamenala viac ako 140 citácií a v hodnotení Scopus má percentil 97 vo vzťahu k veku a počtu citácií v danej oblasti. Zaujímavosťou je, že je citovaná tak v rámci základného, ako aj aplikovaného výskumu a uplatnenie našla, napr. pri riešení problémov s migráciou alebo COVID-om. Na túto prácu nadväzovalo aj viacero článkov košickej školy, ako [J. Katrenič, *A faster FPT algorithm for 3-path vertex cover*, **Inf. Process. Lett. 116(4) (2016), 273 – 278**] a [I. Peterin, G. Semanišin, *Geodesic transversal problem for join and lexicographic product of graphs*, **Comput. Appl. Math. 41(4) (2022)**].

5.21 Problémy Ramseyovského typu

Ako problematika Ramseyovského typu sa vo všeobecnosti zvykne označovať oblasť výskumu v rámci teórie grafov, ktorá študuje existenciu špecificky zafarbených podgrafov v grafoch, ktoré sú (ľubovoľným spôsobom) hranovo zafarbené pomocou istého pevného počtu farieb. Klasický Ramseyov problém rieši otázku minimálneho počtu vrcholov kompletného grafu, ktorý pri ľubovoľnom hranovom 2-zafarbení obsahuje jednofarebnú kópiu vopred určeného menšieho kompletného, resp. všeobecného grafu. Variant tohto problému uvažuje existenciu kópie určeného menšieho grafu, ktorá je (pri hranovom zafarbení celého zdrojového grafu) dúhová: ľubovoľné dve rôzne hrany kópie majú rôzne farby. V kontexte rovinných grafov sa v práci [S. Jendroľ, J. Miškuf, R. Soták, E. Škrabuľáková, *Rainbow faces in edge-colored plane graphs*, **J. Graph Theory 62 (2009), 84 – 99**] študovala otázka najmenšieho počtu farieb v ľubovoľnom hranovom zafarbení rovinného grafu tak, aby sa v rovinnom grafe objavila dúhová stena. Nedávno sa objavila zaujímavá aplikácia týchto výsledkov v doprave, popísaná v článku [T. Tachibara, Y. Hirota, K. Suzuki, K. Tsuritani, H. Hasegawa, *Metropolitan area network model design using regional railways informations for beyond 5G research*, **IEICE Transaction on Communications E106B (2023), 296 – 306**].

Motivovaní horeuvedenou prácou, S. Jendroľ, I. Schiermeyer a J. Tu v práci [*Rainbow numbers for matchings in plane triangulations*, **Discrete Math. 331 (2014), 158 – 164**] navrhli študovať nasledujúci problém Ramseyovho typu: nech H je planárny graf a $\mathcal{P}$ je nejaká množina planárnych grafov. Nech $rb(\mathcal{P}, H)$ je najmenší počet r farieb taký, že ak H je podgrafom nejakého planárneho grafu $G \in \mathcal{P}$, tak akékoľvek hranové zafarbenie grafu G pomocou r farieb obsahuje dúhovo zafarbenú kópiu grafu H. V uvedenej práci autori našli ohraničenia pre $rb(\mathcal{P}, H)$, kde ako množinu $\mathcal{P}$ zvolili množinu rovinných n-vrcholových triangulácií a za H zvolili množinu k hrán takú, že žiadne dve jej hrany nemajú spoločný vrchol (t. j. spárenie). Následne v práci [M. Horňák, S. Jendroľ, I. Schiermeyer, R. Soták, *Rainbow Numbers for Cycles in Plane Triangulations*, **Journal of Graph Theory 78 No. 4 (2015), 248 – 257**] autori iniciovali štúdium dúhových kružníc v hranovo zafarbených rovinných trianguláciách na n vrcholoch (t. j. prípad, kde graf H je kružnica na k vrcholoch). Databáza Scopus udáva na obe spomínané práce spolu 44 citácií.

Táto problematika sa rýchlo ujala: v práci [Z. Qin, Y. Lan, Y. Shi, J. Yue, *Exact rainbow numbers for matching in plane triangulations*, **Discrete Math. 344 (2021) 112301**] je presne určená hodnota $rb(\mathcal{P}, H)$ kde je $\mathcal{P}$ množina rovinných n-

vrcholových rovinných triangulácií a H je spárenie tvorené k hranami. Prehľadový článok [Z. Qin, Y. Lan, Y. Shi, J. Yue, *Long rainbow paths and rainbow cycles in edge colored graphs – A survey*, **Appl. Math. Comput. 317 (2018), 187 – 192**] a čerstvé práce [Y. Li, H. Lin, X. Hu, *Anti-Ramsey number for cycles in n-prisms*, **Discrete Appl. Math. 322 (2022), 1 – 8**], [Z. Jin, R. Yu, Y. Sun, *Anti-Ramsey number of matching in outerplanar graphs*, **Discrete Appl. Math. 345 (2024), 125 – 135**] ukazujú, že je stále živá.

Aj vrcholová verzia spomenutého problému o dúhovej stene je dobre preštudovaná. S. Jendroľ so spoluautormi v článku [Z. Dvořák, S. Jendroľ, D. Kráľ, G. Pap, *Matching and non-rainbow colorings*, **SIAM J. Discrete Math. 33 (2009), 344 – 348**] ukázali (popri iných výsledkoch), že maximálny počet farieb, ktorý môže byť použitý vo vrcholovom zafarbení kubického 3-súvislého rovinného n-vrcholového grafu G, ktorý neobsahuje dúhovú stenu, je rovný $\frac{n}{2} + \mu - 2$, kde μ je počet hrán v maximálnom spárení duálneho grafu G^* ku grafu G.

5.22 Ohodnotenia grafov

Problematika ohodnotení grafov sa na KOKOSe študovala od 80. rokov minulého storočia M. Trenklerom (magické ohodnotenia), J. Ivančom (magické a supermagické ohodnotenia), S. Jendroľom a M. Tkáčom (iregulárna sila grafov).

Najúspešnejšími kolegami pri štúdiu ohodnotení grafov boli prof. M. Bača a doc. A. Feňovčíková (v súčasnosti pôsobiaci na Technickej Univerzite v Košiciach). Obaja sa venujú štúdiu vlastností rôznych typov grafových ohodnotení. Ide o priraďovanie prirodzených čísel prvkom grafu (vrcholom, hranám a v prípade rovinných grafov aj stenám) tak, aby boli splnené isté váhové podmienky pre funkcie agregujúce hodnoty prvkov. Vzhľadom na typ váhových podmienok rozlišujeme viaceré ohodnotenia: graciózne, magické, supermagické, antimagické, iregulárne a rôzne ich modifikácie a zovšeobecnenia. Počas svojej vedecko-výskumnej práce sa M. Bača a A. Feňovčíková úspešne zapojili do riešenia grantových projektov na PF UPJŠ a rozbehli tiež širokú medzinárodnú spoluprácu s rôznymi zahraničnými univerzitami, kde sa venujú problematike grafových ohodnotení, napr. Newcastle a Ballarat (Austrália), Bandung a Jakarta (Indonezia), Tamil Nadu a Chennai (India), Lahore a Faisalabad (Pakistan), Taichung (Taiwan), Jazan a Riyadh (Saudská Arábia), Al Ain (Spojené Arabské Emiráty), Morrow a Georgetown (USA), Castelldefels a Barcelona (Španielsko), Ostrava a iné.

5.22.1 *Magické grafy*

Z histórie matematiky je dobre známa a dôkladne študovaná problematika magických štvorcov – číselných schém, v ktorých sú čísla $1, \ldots, n^2$ rozmiestnené do štvorca $n \times n$ tak, že súčty v riadkoch a stĺpcoch sú rovnaké. Každému takémuto štvorcu možno priradiť ohodnotený kompletný bipartitný graf $K_{n,n}$, v ktorom pre každý vrchol platí, že súčet ohodnotení hrán s ním incidentných je vždy rovnaký (obrátene, každý takto ohodnotený graf $K_{n,n}$ zodpovedá magickému štvorcu). Na základe tohto pozorovania môžeme sformulovať nasledujúcu definíciu: súvislý graf G je **magický**, ak jeho hrany je možné ohodnotiť rôznymi kladnými reálnymi číslami tak, aby súčty týchto ohodnotení pri každom vrchole boli rovnaké (ich spoločná hodnota sa nazýva **magický index**). Štúdium magických grafov otvoril J. Sedláček Problémom 27, ktorý je uvedený v zborníku [*Theory of graphs and its applications*, **Proc. Symp. Smolenice 1963, 163 – 167**]; úlohou je rozhodnúť, či daný graf G je magický. V 70-tych rokoch minulého storočia sa táto oblasť výskumu grafov tešila značnému záujmu. M. Trenklerovi a jeho diplomantovi S. Jeznému sa podaril husársky kúsok: našli nutnú a postačujúcu podmienku nato, aby nejaký graf bol magický, pozri [S. Jezný, M. Trenkler, *Characterization of magic graphs*, **Czech. Math. Journal 33 (108) (1983), 435 – 438**]. V ďalšom období M. Trenkler pokračoval v štúdiu štruktúry magických grafov aj v prácach [*Magic p-dimensional cubes*, **Acta Arithmetica 96 (2001), 364 – 175**] a [*Supermagic complete k-partite hypergraphs*, **Graphs Comb, 17 (2001), 171 – 175**].

Na podnet M. Trenklera sa J. Ivančo začal tiež venovať ohodnoteniam grafov. Nosnou témou jeho výskumu sa stali **supermagické grafy**, t. j. grafy, ktorých hrany je možné ohodnotiť navzájom rôznymi po sebe idúcimi prirodzenými číslami tak, že súčty ohodnotení hrán incidentných s daným vrcholom nezávisia od výberu vrchola. V porovnaní s magickými grafmi ide o oveľa zložitejšiu problematiku, doteraz nie je známa ani ich charakterizácia. V práci [J. Ivančo, *On supermagic regular graphs*, **Math. Bohem. 125 (2000), 99 – 114**] sú charakterizované supermagické regulárne kompletné multipartitné grafy. Článok [S. Drajnová, J. Ivančo, A. Semaničová, *Number of edges in supermagic graphs*, **J. Graph Theory 52 (2006), 15 – 26**] je venovaný odhadom pre maximálne resp. minimálne počty hrán v supermagických grafoch; v práci [J. Ivančo, A. Semaničová, *Some constructions of supermagic graphs using antimagic graphs*, **SUT J. Math. 42 (2006), 177 – 186**] je popísané využitie antimagických grafov pri konštrukcii supermagických grafov.

J. Ivančo neskôr spolu so svojou doktorandkou Ľ. Bezegovou definovali a popísali vlastnosti stupňovo magických grafov, ktoré sú zovšeobecnením regulárnych supermagických grafov (pozri [Ľ. Bezegová, J. Ivančo, *An extension of regular supermagic graphs*, **Discrete Math. 310 (2010), 3571 – 3578**] a [J. Ivančo, Ľ. Bezegová, *Number of edges in degree-magic graphs*, **Discrete Math. 313 (2013), 1349 – 1357**]).

5.22.2 *Iregulárne ohodnotenia*

Postupnosť stupňov vrcholov grafu je jednou zo základných a prirodzene študovaných grafových charakteristík. Jej rôznorodosť obmedzuje známe tvrdenie (dnes už súčasť grafového „folklóru“), že neexistuje konečný graf, ktorého stupne vrcholov by boli navzájom rôzne. Oproti tomu je jednoduché skonštruovať **iregulárne multigrafy** s napospol rôznymi stupňami vrcholov. Navyše je možné každý jednoduchý graf G „iregularizovať", t. j. premeniť ho pridaním dodatočných hrán na iregulárny multigraf G'; minimum z multiplicít takto získaných multigrafov G' definuje tzv. **iregulárnu silu** G (definovanú Chartrandom a kol. v roku 1988). Multiplicity násobných hrán v G' možno potom chápať ako hodnoty priradené hranám pôvodného grafu G – takto získané ohodnotenie indukuje napospol rôzne súčty hodnôt hrán pri každom vrchole. Motivovaní prácami o iregulárnej sile grafu M. Bača, S. Jendroľ, M. Miller a J. Ryan začali skúmať totálnu hranovú iregulárnu silu grafu ako invariant ku iregulárnej sile pre totálne ohodnotenia. V práci [M. Bača, S. Jendroľ, M. Miller, J. Ryan, *On irregular total labellings*, **Discrete Math. 307 (2007), 1378 – 1388**] zaviedli pojem totálnej váhy vrchola (resp. hrany) ako súčtu hodnoty priradenej vrcholu (resp. hrane) a hodnôt priradených hranám (resp. vrcholom) incidentným s vrcholom (resp. s hranou). Potom totálne ohodnotenie je iregulárne, ak váhy rôznych vrcholov (resp. hrán) sú rôzne; totálna vrcholová (resp. hranová) iregulárna sila $tvs(G)$ (resp. $tes(G)$) grafu G je definovaná ako minimálna hodnota z najväčších hodnôt hrán spomedzi všetkých možných iregulárnych ohodnotení. Spomínaní autori stanovili dolné a horné hranice pre tieto grafové invarianty a pre niektoré triedy grafov (úplne grafy, prizmy, hviezdy, cesty, cykly, kolesá a grafy priateľstva) uviedli presné hodnoty, ktoré dokazovali tesnosť dolných hraníc. Práca zaujala mnohých odborníkov pracujúcich v tejto oblasti a podnietila ich výskum v hľadaní lepších horných ohraničení pre dané invarianty a určení ich presných hodnôt pre ďalšie triedy grafov. Doteraz je na túto prácu evidovaných 414 citácií podľa Google Scholar, resp. 217 (vo Web of Science).

So značným záujmom sa stretli aj práce J. Ivanča a S. Jendroľa [*Total edge irregularity strength of trees*, **Discuss. Math. Graph Theory 26 (2006), 449 – 456**] (viac ako 50 citácií) a S. Jendroľa, J. Miškufa, R. Sotáka [*Total edge irregularity strength of complete graphs and complete bipartite graphs*, **Discrete Math. 310 (2010), 400 – 407**] (citovaná viac ako 35-krát).

A. Feňovčíková a M. Bača ďalej pokračujú v štúdiu iregulárnych ohodnotení grafov a ich rôznych modifikácii. A. Ahmad,

O. B. S. Al-Mushayt a M. Bača v práci [A.Ahmad, O. B. S. Al-Mushayt, M.Bača, *On edge irregularity strength of graphs*, **Applied Mathematics and Computation 243 (2014), 607 – 610**] definovali hranovú verziu iregulárnej sily. V práci [M. Bača, S. Jendroľ, K. Kathiresan, K. Muthugurupackiam, *Entire labeling of plane graphs*, **Applied Mathematics & Information Sciences 9 No. 1 (2015), 263 – 267**] autori ďalej definovali stenovú verziu iregulárnych ohodnotení (a zodpovedajúci invariant, úplnú stenovú iregulárnu silu). V prehľadovom článku [M. Bača, S. Jendroľ, K. Kathiresan, K. Muthugurupackiam, A. Semaničová-Feňovčíková, *A survey of irregularity strength*, **Electronic Notes in Discrete Mathematics 48 (2015), 19 – 26**] sú uvedené známe výsledky o hranových, vrcholových, totálnych a stenových iregulárnych silách grafov.

F. Ashraf a kol. v práci [F. Ashraf, M. Bača, Z. Kimáková, A. Semaničová-Feňovčíková, *On vertex and edge H-irregularity strength of graphs*, **Discrete Math. Algorithms and Appl. 8 (4) (2016) 13 pages**] zaviedli pojem vrcholovej a hranovej H-iregulárnej sily ako invariantu vrcholových alebo hranových ohodnotení, pri ktorých sa rozlišujú váhy všetkých podgrafov izomorfných s predpísaným podgrafom H. V spolupráci so spoluriešiteľmi z Pakistanu, Saudskej Arábie a Spojených Arabských Emirátov boli taktiež definované modulárne verzie hranovej, vrcholovej a totálnej iregulárnej sily v prácach [M. Bača, M. Imran, A. Semaničová-Feňovčíková, *Irregularity and Modular Irregularity Strength of Wheels*, **Mathematics 9 No. 21 (2021) 2710, 14 pages**], [G. Ali, M. Bača, M. Lascsáková, A. Semaničová-Feňovčíková, A. A. Loqaily, N. Mlaiki, *Modular total vertex irregularity strength of graphs*, **AIMS Mathematics 8 No. 4 (2023), 7662 – 7671**], [A. N. A. Koam, A. Ahmad, M. Bača, A. Semaničová-Feňovčíková, *Modular edge irregularity strength of graphs*, **AIMS Mathematics 8 No. 1 (2023), 1475 – 1487**].

5.22.3 *Antimagické grafy*

Ďalšia téma, ktorá vzbudila záujem o výskum, sa týka **antimagických grafov**; sú to grafy, ktorých hrany možno ohodnotiť číslami $1, 2, \ldots, m$ (kde m je počet hrán) tak, že súčty hodnôt hrán so spoločným vrcholom sú pre každý vrchol rôzne. Tento pojem zaviedli N. Hartsfield a G. Ringel v knihe [N.Hartsfield, G.Ringel, *Pearls in Graph Theory*, **Academic Press, Inc., Boston, 1990 (Revised version 1994)**] a formulovali hypotézu, že každý súvislý graf (s výnimkou cesty na dvoch vrcholoch) je antimagickým. Táto hypotéza je stále otvorená, aj keď pre niektoré špeciálne triedy grafov bola jej platnosť dokázaná. Napr. N. Alon a kol. v práci [N. Alon, G. Kaplan, A. Lev, Y. Roditty, R. Yuster, *Dense graphs are antimagic*, **J. Graph Theory 47 (2004), 297 – 309**] použitím pravdepodobnostných techník analytickej teórie čísel ukázali, že táto hypotéza je pravdivá pre všetky grafy s dostatočne veľkým minimálnym stupňom (rádu logaritmu počtu vrcholov), resp. grafy, ktoré majú univerzálny či sub-univerzálny vrchol. V práci [S. Arumugam, K. Premalatha, M. Bača, A. Semaničová-Feňovčíková, *Local antimagic vertex coloring of a graph*, **Graphs Combin. 33 (2017), 275 – 285**] a nezávisle v [J. Bensmail, M. Senhaji, K. Szabo Lyngsie, *On a combination of the 1-2-3 conjecture and the antimagic labelling conjecture*, **Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. 19 (2017)**] autori zaviedli lokálne antimagické ohodnotenie ako lokálnu verziu Hartsfieldovho a Ringelovho pojmu antimagického ohodnotenia (t. j. vrcholové váhy sú rôzne pre každú dvojicu susedných vrcholov). Stanovili hypotézu, že každý súvislý graf okrem cesty na dvoch vrcholoch má lokálne antimagické ohodnotenie.

J. Haslegrave v práci [J. Haslegrave, *Proof of a local antimagic conjecture*, **Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. 20 (2018)**] dokázal platnosť tejto hypotézy pomocou pravdepodobnostných metód. Táto téma sa stala zaujímavá a podnietila záujem o ďalší výskum. Článok [S. Arumugam, K. Premalatha, M. Bača, A. Semaničová-Feňovčíková, *Local antimagic vertex coloring of a graph*, **Graphs Combin. 33 (2017), 275 – 285**] má doteraz evidovaných 159 citácií (Google Scholar), resp. 65 (podľa Web of Science). Naviac v danom článku autori poukázali na to, že každé lokálne antimagické ohodnotenie indukuje regulárne vrcholové zafarbenie grafu G, kde vrcholová váha je farbou daného vrchola. To prirodzene vedie k pojmu **lokálneho antimagického chromatického čísla** definovaného ako minimálny počet farieb počítaný cez všetky zafarbenia grafu G, ktoré sú indukované lokálnymi antimagickými ohodnoteniami. Autori dokázali, že každý strom s t listami má lokálne antimagické chromatické číslo aspoň $t + 1$.

V práci [S. Arumugam, Y. C. Lee, K. Premalatha, T. M. Wang, *On local antimagic vertex coloring for corona products of graphs*, **arXiv 1808.04956, Aug. 15 (2018)**] bola stanovená hypotéza, že pre každý strom s t listami je lokálne antimagické chromatické číslo aspoň $t + 1$ a najviac $t + 2$. V práci [M. Bača, A. Semaničová-Feňovčíková, R. T. Lai, T. M. Wang, *On Local Antimagic Vertex Coloring for Complete Full t-ary Trees*, **Fundamenta Informaticae 185 No. 2 (2022), 99 – 113**] je dokázané, že pre úplné t-árne stromy, t nepárne, je lokálne antimagické chromatické číslo presne $t + 1$. Len nedávno bolo publikovaných niekoľko prác, ktoré dokazujú platnosť predošlej hypotézy pre špeciálne triedy stromov.

N. Bong a kol. v práci [N. Bong, M. Bača, A. Semaničová-Feňovčíková, K. A. Sugeng, T. M. Wang, *Local face antimagic evaluations and coloring of plane graphs*, **Fundamenta Informaticae 174 (2020), 103 – 119**] zaviedli pojem **lokálne stenového antimagického ohodnotenia** typu (a, b, c) pre 2-súvislé rovinné grafy a nový grafový invariant – lokálne stenové antimagické chromatické číslo typu (a, b, c). Zatiaľ poznáme ohraničenia tohto grafového invariantu a jeho presné hodnoty pre isté triedy 2-súvislých rovinných grafov. Téma je aktuálnou výzvou pre ďalšiu prácu.

Ďalšie výsledky a vzájomné vzťahy medzi rôznymi typmi antimagických ohodnotení možno nájsť v prehľadovom článku [M. Bača, E. T. Baskoro, L. Brankovic, S. Jendroľ, Y. Lin, O. Phanalasy, J. Ryan, A. Semaničová-Feňovčíková, Slamin, K. A. Sugeng, *A survey of face antimagic evaluation of graphs*,

Australasian Journal of Combinatorics 69 No. 3 (2017), 382 – 393] a tiež v dvoch monografiách [M. Bača, M. Miller, *Super Edge-Antimagic Graphs*, **Brown Walker Press, Boca Raton, 2008**] a [M. Bača, M. Miller, J. Ryan, A. Semaničová-Feňovčíková, *Magic and Antimagic Graphs*, **Attributes, Observations, and Challenges in Graph Labelings, Springer Nature Switzerland AG, Cham, 2019**].

5.23 Aplikácie teórie grafov pri ochrane a bezpečnosti komunikačných sietí

Reálnu komunikačnú sieť môžeme modelovať grafmi nasledovne: uzlom siete priradíme vrcholy grafu a komunikačným linkám medzi uzlami hrany spájajúce príslušné vrcholy. Výmena informácií medzi uzlami siete potom prebieha – v jej grafovom modeli – pozdĺž nejakých ciest spájajúcich vrcholy priradené uzlom. Pre zaručenie bezpečnej výmeny informácií od jedného uzla k inému je potrebné chrániť komunikačné kanály transportu informácie kľúčmi a heslami; rozumnou požiadavkou zabezpečenia je existencia takej komunikačnej cesty, v rámci ktorej sú všetky kľúče/heslá rôzne (kvôli zamedzeniu vonkajšiemu útoku na základe opätovného použitia uniknutého hesla). Situáciu teda môžeme modelovať pomocou zafarbenia hrán (farby predstavujú heslá), pričom žiadame, aby pre každú dvojicu vrcholov existovala rôznofarebná (t. j. dúhová) cesta, ktorá ich spája. Toto možno jednoducho dosiahnuť, ak sa každej hrane priradí rôzna farba; kvôli redukcii nákladov na manažment hesiel a celého zabezpečenia nás však skôr zaujíma minimálny počet farieb, pre ktorý existuje hranové zafarbenie s požadovanou vlastnosťou **dúhovej konexie** medzi každými dvomi vrcholmi.

Ako prví si tieto skutočnosti uvedomili G. Chartrand, G. I. Johns, K. A. McKeon a P. Zhang v dnes už klasickej a vysokocitovanej práci [*Rainbow connection in graphs*, **Math. Bohem. 133 (2008), 85 – 98**]. V nadväznosti na ňu začali S. Jendroľ, C. Brause a I. Schiermeyer v [*Odd connection and odd *vertex-connection of graphs*, **Discrete Math. 341 (2018), 3500 – 3512**] študovať všeobecný teoretický meta-koncept nazvaný $\mathcal{P}$**-súvislosť**. V ňom vychádzame z množín slov vytvorených z prvkov-písmen konečnej abecedy $\mathcal{A}$ (môžu to byť farby-čísla, resp. iné objekty). Tieto slová môžu mať rôzne vlastnosti: napr. slovo sa nazýva **vlastné**, ak každé dve jeho susedné písmená sú rôzne; je **dúhové**, ak všetky jeho písmená sú navzájom rôzne; je **nepárne**, ak každé v ňom použité písmeno sa vyskytuje nepárny počet krát; je **bezkonfliktné**, ak nejaké písmeno sa v ňom vyskytuje práve raz; je **dynamické** (angl. loose), ak sú v ňom použité aspoň tri rôzne písmená, a je **monochromatické**, ak všetky písmená v ňom sú rovnaké. Nech teraz $\mathcal{P}$ je nejaká vlastnosť slov, G je súvislý graf a nech c je zafarbenie jeho hrán (resp. jeho vrcholov). Ak medzi každými dvomi jeho vrcholmi existuje zafarbená cesta (chápaná ako slovo), ktorá má vlastnosť $\mathcal{P}$, tak graf sa nazýva $\mathcal{P}$**-súvislý** (resp. vrcholovo $\mathcal{P}$-súvislý). Minimálny počet farieb potrebných na zafarbenie hrán (resp. vrcholov) G tak, aby bol $\mathcal{P}$-súvislým (resp. vrcholovo $\mathcal{P}$-súvislým) sa nazýva číslo $\mathcal{P}$-súvislosti (resp. číslo vrcholovej $\mathcal{P}$-súvislosti).

J. Czap, S. Jendroľ a J. Valiska prišli v práci [*Conflict-free connection of graphs*, **Discuss. Math. Graph Theory 40 (2020), 51 – 65**] s konceptom bezkonfliktných ciest. Ten sa veľmi rýchle ujal (ešte pred uverejnením v časopise) a následne vzniklo niekoľko prác, ktoré ho rozvíjali; jednou z nich je práca [H. Chang, T. D. Doan, Z. Huang, S. Jendroľ, X. Li, I. Schiermeyer, *Graphs with conflict-free connection number two*, **Graphs and Combin. 34 (2018), 1553 – 1563**]. S. Jendroľ spolu s nemeckými kolegami C. Brausem a I. Schiermeyerom uverejnili nedávno dve práce, ktoré riešia situácie, keď $\mathcal{P}$ je vlastnosť byť dynamické slovo, resp. viacfarebné, či inak zaujímavé slovo: [*From colorful to rainbow path in graphs: Colouring the vertices*, **Graphs Combin. 37(5) (2021), 1823 – 1839**] a [*Loose edge-connection of graphs*, **Graphs Combin. 39(4) (2023), 79**].

5.24 Priesečníkové čísla grafov

Ak je graf planárny, tak ho možno znázorniť v rovine tak, že žiadne dve jeho hrany sa nepretnú. Ak to možné nie je, tak sú vynútené pretínania niektorých hrán; v nakresleniach grafu tak vznikajú priesečníky (body roviny, v ktorých sa pretnú práve dve hrany). **Priesečníkové číslo grafu** je potom rovné najmenšiemu počtu priesečníkov, ktoré sa v diagrame grafu musia vyskytnúť. Záujem vedeckej komunity o presné hodnoty priesečníkových čísel grafu je spojený nielen so snahou vytvárať čitateľné a zrozumiteľné vizualizácie rôznych schém, ale tiež napríklad s minimalizáciou rozmerov mikročipov, tzv. problematikou VLSI-obvodov (Very-large-scale integration).

Priesečníkovým číslam grafov sme sa v Košiciach začali venovať na začiatku osemdesiatych rokov. Motiváciou boli dva čerstvé pilotné vedecké články – prvý od L. W. Beinekeho a R. D. Ringeisena [*On the crossing numbers of products of cycles and graphs of order four*, **J. Graph Theory 4 (1980), 145 – 155**] a druhý od S. Jendroľa a M. Ščerbovej [*On the crossing numbers of* $S_m \times P_n$ *and* $S_m \times C_n$, **Časopis pro pěstování matematiky 107 (1982), 225 – 230**].

Veľmi úspešným členom Košickej skupiny diskrétnej matematiky pri štúdiu tejto problematiky bol Marián Klešč. Vo svojich prácach [M. Klešč, *On the crossing numbers of Cartesian products of stars and paths or cycles*, **Math. Slovaca, 41 (1991), 113 – 120**], [M. Klešč, *The crossing numbers of products of paths and stars with 4-vertex graphs*, **J. Graph Theory 18 (1994), 605 – 614**] nadviazal na výsledky L. W. Beinekeho a R. D. Ringeisena ako aj S. Jendroľa so M. Ščerbovou tým, že skompletizoval informácie o presných hodnotách priesečníkových čísel karteziánskych súčinov všetkých 4-vrcholových súvislých grafov s ľubovoľnou cestou, kružnicou a hviezdou. Následne so spoluautormi [M. Klešč, R. B. Richter, I. Stobert, *The crossing number of* $C_5 \times C_n$, **J. Graph Theory, 22 (1996), 239 – 243**] rozšíril platnosť hypotézy L. W. Beinekeho a R. D. Ringeisena, že priesečníkové číslo karteziánskeko súčinu dvoch kružníc

$C_m \times C_n$ je $n(m-2)$ pre každé n väčšie alebo rovné m. Tí ju vo svojom článku z roku 1980 dokázali pre $m = 4$; M. Klešč, R. B. Richter a I. Stobert posunuli hodnotu m, pre ktorú hypotéza platí na 5. Hypotéza je dodnes otvorená pre hodnoty $m \geq 7$. V prvej dekáde 21. storočia M. Klešč spolu so svojimi spolupracovníkmi publikoval viacero prác, v ktorých boli určené presné hodnoty priesečníkových čísel karteziánskych súčinov vybraných 5-, 6- a 7-vrcholových grafov s ľubovoľne veľkými cestami, kružnicami, resp. hviezdami.

Začiatkom 21. storočia D. Bokal zo Slovinska (v tom čase doktorand na Univerzite v Ljubljane) rozpracoval teóriu tzv. **zip-súčinu** grafov (ktorá umožnila vypočítať presné hodnoty priesečníkového čísla špecifických grafov); nevedel však nájsť vhodný graf na aplikáciu získaných výsledkov. Spolu s M. Kleščom našli použiteľný graf – bol to graf karteziánského súčinu $S_m \times P_n$. Hypotéza pre hodnotu priesečníkového čísla tohto grafu bola publikovaná už v práci S. Jendroľa a M. Ščerbovej v roku 1982. D. Bokal v [*On the crossing numbers of Cartesian products with paths*, **J. Combin. Theory Ser. B 97 (2007), 381 – 384**] dokázal jej platnosť. Bol to prvý graf karteziánského súčinu dvoch ľubovoľne veľkých grafov, pre ktorý bola presne určená hodnota jeho priesečníkového čísla. Neskôr M. Klešč využil vlastnosti zip-súčinu a určil presné priesečníkové čísla karteziánskych súčinov pre viaceré dvojice ľubovoľne veľkých grafov. K najvýznamnejším prácam z tejto problematiky možno zarátať: [M. Klešč, Š. Schrötter, *On the crossing numbers of Cartesian products of stars and graphs of order six*, **Discuss. Math. Graph Theory 33 (2013), 583 – 597**], [M. Klešč, J. Petrillová, M. Valo, *On the crossing numbers of Cartesian products of wheels and trees*, **Discuss. Math. Graph Theory 37 (2017), 399 – 413**], [Z. Su, M. Klešč, *Crossing numbers of $K_{1,1,4,n}$ and $K_{1,1,4} \times T$*, **Ars Combinatoria 148 (2020), 137 – 148**].

V práci [M. Klešč, *The join of graphs and crossing numbers*, **Electronic Notes in Discrete Math. 28 (2007), 349 – 355**] boli po prvýkrát skúmané priesečníkové čísla špeciálneho súčinu grafov, známeho ako **spojenie** (angl. join) **grafov**. Práca vzbudila veľký ohlas a do roku 2023 databáza Scopus registruje na ňu 50 citácií. Tento článok, ako aj publikácie [M. Klešč, *The crossing numbers of join of the special graph on six vertices with path and cycle*, **Discrete Math. 310 (2010), 1475 – 1481**], [M. Klešč, Š. Schrötter, *The crossing numbers of join products of paths with graphs of order four*, **Discuss. Math. Graph Theory 31 (2011), 321 – 331**], boli motiváciou pre naštartovanie výskumu priesečníkových čísel spojení grafov. Významný posun v skúmaní priesečníkových čísel joinov grafov inicioval M. Klešč v spolupráci s M. Stašom, keď podrobnejšie rozpracovali metódu tzv. cyklických permutácií (ktorú prvýkrát použil D. Kleitman v roku 1970 na určenie priesečníkového čísla kompletného bipartitného grafu $K_{5,n}$). Metóda umožňuje veľmi efektívne – iba využitím kombinatorických vlastností cyklických permutácií – určovať priesečníkové čísla grafov, ktoré ako podgraf obsahujú kompletný bipartitný graf. Spomínané výsledky je možné nájsť v prácach [M. Klešč, M. Staš, *Cyclic permutations in determining crossing numbers*, **Discuss. Math. Graph Theory 42 (2022), 1163 – 1183**], [M. Klešč, M. Staš, J. Petrillová, *The crossing numbers of join of special disconnected graph on five vertices with discrete graphs*, **Graphs and Combinatorics 38 (2022) art. 35**] a vo viacerých ďalších prácach M. Staša.

Okrem už spomínaných súčinov grafov (karteziánsky súčin resp. spojenie grafov), M. Klešč dosiahol nové výsledky aj pre hodnoty priesečníkových čísel grafov získaných odlišnými spôsobmi. Takéto výsledky je možné nájsť napríklad v prácach [S. Jendroľ, M. Klešč, *On graphs whose line graphs have crossing number one*, **J. Graph Theory 37 (2001), 181 – 188**], [M. Klešč, J. Petrillová, M. Valo, *Minimal number of crossings in strong product of paths*, **Carpathian J. Math. 29 (2013), 27 – 32**].

5.25 Aplikácie grafov v sociálnych a komplexných sieťach

Jednou z aplikácií teórie grafov, ktorá nepochybne zásadným spôsobom ovplyvnila modernú spoločnosť v rozličných aspektoch (komunikácia, internet a WWW, médiá, ekonomické vzťahy, politika a i.) sú sociálne resp. všeobecne komplexné siete. Štúdium vlastností grafov reálnych systémov spojené s interpretáciou zistení vo svetle praxe (obvykle s cieľom zlepšiť správanie sa modelovaného systému) zaznamenáva v posledných dvoch dekádach expanziu nielen interdisciplinárne ladených publikácií, ale i výstupov z oblasti „čistej" teórie grafov. Na pôde KOKOSu sa touto problematikou zaoberal T. Madaras spolu s doktorandkou J. Coroničovou Hurajovou. Tri z jeho prác ([S. Gago, J. Hurajová, T. Madaras, *Notes on the betweenness centrality of a graph*, **Mathematica Slovaca 62(1), (2012), 1 – 12**], [S. Gago, J. Coroničová Hurajová, *On betweenness-uniform graphs*, **Czechoslovak Mathematical Journal 63(3) (2013), 629 – 642**] a [T. Madaras, J. Coroničová Hurajová, *More on betweenness-uniform graphs*, **Czechoslovak Mathematical Journal 68(2) (2018), 293 – 306**]) sú venované tzv. **medziľahlostnej centralite** – významnému a v praxi široko používanému indexu, ktorý kvantitatívne vyjadruje pozíciu aktéra v rámci celej siete (vyššie hodnoty korelujú s jeho väčšou dôležitosťou a dosahom); skúmali sa v nich odhady daného invariantu vzhľadom na rozličné parametre grafu, vlastnosti grafov, ktorých vrcholy majú rovnakú hodnotu tohto invariantu a ich netriviálne konštrukcie. Podobné výsledky o hranovej analógii tohto indexu centrality boli nedávno publikované v [J. Coroničová Hurajová, T. Madaras, D. A. Narayan, *Characterizing edge betweenness-uniform graphs*, **Theory and Applications of Graphs 9(1) (2022) 5**]. Rozličné získané výsledky o medziľahlostnej centralite boli taktiež zhrnuté (v spoluautorstve so S. Gago a J. Coroničovou Hurajovou) do kapitoly *Betweenness centrality in graphs* v monografii [*Quantitative Graph Theory: Mathematical Foundations and Applications* (**M. Dehmer, F. Emmert-Streib Eds., CRC Press, 2014**].

5.26 Dimenzie grafov

Kompletný n-vrcholový graf si môžeme predstaviť ako n-rozmerný simplex – konvexný mnohosten v euklidovskom priestore $\mathbb{R}^n$, ktorého každé dva vrcholy vytvárajú hranu jednotkovej dĺžky. Keďže každý graf je podgrafom nejakého kompletného grafu, existuje minimálny rozmer euklidovského priestoru, v ktorom možno realizovať daný graf tak, aby všetky jeho hrany boli úsečky jednotkovej veľkosti; jeho hodnota je tzv. **dimenzia grafu**. Túto problematiku skúmal v rámci Košickej školy T. Madaras spolu so svojím doktorandom P. Široczkim. Dosiahnuté výsledky z ich spoločnej práce [T. Madaras, P. Široczki, *On the dimension of Archimedean solids*, **Opuscula Mathematica 34(1) (2014), 123 – 138**] ukazujú, že niektoré archimedovské trojrozmerné mnohosteny možno kombinatoricky realizovať nielen „štandardnými modelmi" v $\mathbb{R}^3$, ale aj ako jednotkové nakreslenia v rovine (pre viaceré mnohosteny však takáto realizácia v rovine možná nie je); konštrukcie takýchto nakreslení využívali netriviálny aparát teórie funkcií viacerých premenných. Zložitosť problému charakterizácie grafov dimenzie 2 podčiarkuje tiež práca [T. Madaras, P. Široczki, *Minimal graphs with respect to geometric distance realizability*, **Discussiones Mathematicae Graph Theory 41(1) (2021), 65 – 73**], kde je dokázané, že v zásade existuje – pre dostatočne veľký pevný počet vrcholov – exponenciálne mnoho grafov, ktoré nemajú v rovine jednotkové nakreslenie, ale všetky ich vlastné podgrafy takéto nakreslenie majú. Doplnkom k výskumu tejto problematiky je aj práca [P. Hudák, T. Madaras, P. Široczki, *Note on the dimension of the Mycielskian of a graph*, **International journal of Pure and Applied Mathematics 106(2) (2016), 677 – 688**], v ktorej sa skúmajú odhady, resp. presné hodnoty dimenzie grafov získaných Mycielskeho konštrukciou z kružníc, stromov a kompletných grafov.

6

BUDÚCNOSŤ A SMEROVANIE KOŠICKEJ ŠKOLY DISKRÉTNEJ MATEMATIKY

Tomáš Madaras a Roman Soták

Známa téza (o ktorej platnosti vo finančnej, športovej či akademickej sfére sa neustále vedú diskusie) tvrdí, že najlepším ukazovateľom budúcich výsledkov sú minulé výsledky. Aj keď medzi obidvomi časťami daného výroku existuje istá korelácia, výrok samotný nie je ani nutnou, ani postačujúcou podmienkou kvality budúcich výsledkov. Preto kontinuita Košickej školy diskrétnej matematiky a jej ďalšieho smerovania musí byť – napriek úspechom, ktoré už dosiahla, resp. momentálne dosahuje – jej členmi nanovo a opakovane reflektovaná.

Naši školitelia nám kedysi, pred vyše tridsiatimi rokmi otvorili vchodovú bránu do *„paláca diskrétnej matematiky"* a spolu so svojimi kolegami „z partie" nás sprevádzali po jeho sieňach a komnatách, ochotne nám ukazujúc všetky ich cennosti vrátane tých z „košického zlatého pokladu". Neskôr nám dali svoju dôveru, aby sme spolu s nimi v tomto paláci prebývali, mali účasť na jeho krásach a rozširovali nadobudnuté umelecké zbierky. Úloha „ísť a konať podobne", ktorá dnes stojí pred nami, nijako nie je jednoduchá, obzvlášť v dnešných časoch: pokles záujmu o štúdium matematiky na Slovensku (pravdepodobne korelujúci s globálnym nárastom obmedzenosti a príklonu k voľbe ľahších a ľúbivých riešení komplexných situácií v spoločnosti) a možnosti, ktoré chytrým absolventom ponúka korporátna sféra, hrajú (dočasne) proti nám (na pohľad so silnými kartami). Matematici sú však predurčení hľadať a nachádzať riešenia problémov a v tomto smere bývajú optimistickí (v zmysle viery, že po čase vždy dôjdu aspoň k čiastkovej odpovedi a „pocit potom“ bude ostro lepší, ako pred nastolením problému). Navyše platí, že v tomto hľadaní nie sú sami a typicky dôjdu k riešeniam, keď spoja svoje sily. V tejto súvislosti nás v posledných rokoch veľmi oslovil príklad partnerských výskumných skupín (z Bratislavy, Plzne i Bordeaux), ktoré programovo a cieľavedomo zapájajú do svojich aktivít (napr. pravidelnou účasťou na stredoeurópskych konferenciách teórie grafov) svojich študentov preddoktorandského štúdia, a tým si vytvárajú bázu pre svoj ďalší rozvoj; v blízkej budúcnosti plánujeme pre takéto zapojenie študentov, resp. spoločné vzdelávanie doktorandov, priamo získať finančnú podporu z grantových bilaterálnych i multilaterálnych schém. Je tiež potrebné zdôrazniť, že prídavné meno „Košická“ v charakterizácii našej školy diskrétnej matematiky akcentuje jej celoregionálny rozmer a jej činnosť nijako nie je obmedzená len na pôdu Prírodovedeckej fakulty UPJŠ: významnú úlohu v nej plnia výskumné skupiny pôsobiace na Technickej univerzite; bude aj našou snahou prispieť k ich vedeckému rozvoju prostredníctvom pokračujúcich spoločných národných APVV-projektov, ako i personálnemu posilneniu odporúčaním a podporou mladých vedeckých pracovníkov, ktorí sa po dovŕšení doktorandského štúdia rozhodnú pokračovať v akademickej sfére.

Tradičné témy, ktoré boli v centre záujmu matematikov z košickej školy – globálna a lokálna štruktúra grafov (najmä planárnych, polyedrálnych, vnorených do plôch vyšších rodov, resp. grafov, ktoré sú im príbuzné z hľadiska geometricko-topologických vlastností ich reprezentácií) a ich farebnosť – sú aktuálne aj dnes; minulé i nedávne práce košických autorov z tejto oblasti každoročne zaznamenávajú nové ohlasy. Avšak, „*život je pohyb*“ (Aristoteles), preto je našou snahou na jednej strane aktívne si osvojiť a následne využiť vo svojom výskume v daných oblastiach nové metódy a dôkazové techniky (tu možno špecificky spomenúť kompresiu entropie, kombinatorický Nullstellensatz-princíp, pravdepodobnostnú metódu, lineárnu a celočíselnú optimalizáciu, ale aj aktívne použitie výpočtovej techniky a systémov počítačovej algebry pri overovaní i návrhu hypotéz a protipríkladov k nim), ako aj pokúsiť sa „otvoriť dvere vnímania" pre „lov dobrej vôle" i v témach, ktoré priamo neboli integrálnou súčasťou histórie výskumu Košickej školy. Medzi takéto oblasti patrí, napr. problematika sociálnych, resp. komplexných sietí (tak z hľadiska „čistej" matematiky, ako aj pre ich aplikácie), geometrické vlastnosti grafových reprezentácií či aplikácie grafov v nanofyzike. Posilniť svoju odvahu a „prekročiť prah nádeje" možno aj voči väčším a veľkým otvoreným či populárnym problémom diskrétnej matematiky (napokon, prvé a prostredné kroky k rozriešeniu známej Barnettovej hypotézy o hamiltonovskosti fullerénov sa udiali práve v prostredí Košickej školy). Úplne nové výzvy a perspektívy prináša masívny príchod generatívnej umelej inteligencie – napriek kontroverznosti a súčasným výhradám k jej použitiu vo vede a výučbe je skôr pravdepodobné, že sa v matematike zakrátko stane rovnako bežným a užitočne používaným nástrojom, ako kalkulačky alebo platforma WolframAlpha. Autori príspevku si už vyskúšali jej použitie pri zostavovaní cvičení (zahŕňajúcimi tiež úlohy dôkazového typu) z teórie grafov; na druhej strane, zdá sa, že k jej korektnému použitiu ako pomôcky pre návrh hypotéz je ešte veľmi dlhá cesta.

Medzinárodná spolupráca *Košickej školy diskrétnej matematiky* bola jej organickou črtou už od čias vzniku. Aj keď v toku časov a zmien sa niektoré jej dlhé a pekné príbehy zavŕšili (napr. spolupráca s Technische Universität v Ilmenau, Nemecko), ich tóny doznievajú ešte dlho po spustení opony; na druhej strane, viaceré úspešné spolupráce z minulosti (s poľskými, maďarskými, či slovinskými grafovými skupinami) pokračujú dodnes a ich intenzita (a počet nových spoločných článkov) vzrastá (zrejme najväčšiu expanziu zaznamenáva spolupráca kolegov z Technickej univerzity s vedcami z indonézskych, indických a pakistanských univerzít). Počas posledných rokov sa podarilo dosiahnuť nové spoločné výsledky i s pracoviskami bez tradície predošlých kontaktov (Francúzsko, Belgicko) – dúfame, že tento trend bude pokračovať aj v budúcnosti.

Ak má kniha dobrý príbeh, nemusí byť nevyhnutne bestsellerom – spisovateľovi nezriedka stačí (popri pocite spokojnosti z jej napísania), že si nájde okruh čitateľov, ktorým sa zapáči. Radi sme boli a stále radi sme súčasťou úspešného príbehu Košickej školy diskrétnej matematiky – a rovnako by sme radi dopriali zažívať tento pocit „byť súčasťou tohto príbehu“ aj našim nasledovníkom. Máme relatívne odôvodnenú nádej, že niektoré ich výsledky (i keď zatiaľ nevedno, či vo forme poznámky pod čiarou, odstavca alebo celej kapitoly) sa možno nájdu v tzv. „*Knihe*“ (angl. ‚*The Book*‘), na ktorú často poukazoval Paul Erdős, a ktorá je neustálou inšpiráciou pri hľadaní a nachádzaní krásnej matematiky.