

KOŠICKÁ MATEMATICKÁ ŠKOLA

TEÓRIE MNOŽÍN A TOPOLOGIE
SEMINÁR PROF. LEVA BUKOVSKÉHO

prvý diel

KOŠICKÁ MATEMATICKÁ ŠKOLA

TEÓRIE MNOŽÍN A TOPOLOGIE

SEMINÁR PROF. LEVA BUKOVSKÉHO

prvý diel

Štefan Tkačik a kolektív



Pedagogická fakulta Katolíckej univerzity v Ružomberku
Ružomberok 2023

Funkcia gimel \beth pre ľubovoľné nekonečné kardinálne číslo κ je definovaná rovnosťou $\beth(\kappa) = \kappa^{\text{cf}(\kappa)}$. Formula na obálke je súčasťou induktívneho výpočtu mocniny $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ (Věta 5.29 a Důsledek 5.30, B. Balcar a P. Štěpánek: *Teorie množin, Academia, Praha 1986*), (Ch. 11, Theorem 29, W. Just and M. Weese: *Discovering Modern Set Theory I: The Basics, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Soc., 1996*), pôvodne získaného v L. Bukovský: *The continuum problem and the powers of alephs*. Comment. Math. Univ. Carolinae 6 (1965), 181–197.

Miroslav Repický, Jaroslav Šupina

Tvrdíš to? Dokáž to!

LEN VOLOVI JE VŠETKO JASNÉ.

prof. RNDr. Lev Bukovský, DrSc.

*Vydané s podporou projektu KEGA 004KU-4/2022 Osobnosti
slovenskej matematiky II – životné vzory pre budúce generácie*

Redaktori: Zuzana Bukovská, Štefan Tkačik

Recenzenti: Lucia Csachová, Tomáš Lengyelfalussy

Obálka: Milan Pudiš

Grafická úprava a sadzba: Jozef Doboš, Štefan Tkačik

© VERBUM - vydavateľstvo KU

Ružomberok, 2023

ISBN 978-80-561-1031-7

OBSAH

Predhovor	9
Úvod	13
1 História seminára	15
1.1 História seminára	15
1.2 Seminár, druhá rodina prof. Leva Bukovského Referencie	20 24
1.3 História seminára očami prvých účastníkov	26
Referencie	31
2 Spomienky účastníkov seminára	33
2.1 Levove Evy spomínajú	33
Referencie	40
2.2 Profesor Bukovský	41
2.3 Verzamelingen en van Alles Eromheen	45
2.4 Moje dojmy a postrehy zo seminára	47
2.5 My memories of the set theoretic seminar	52
2.6 Spomienky na seminár prof. Bukovského	58
2.7 Príspevok o seminári prof. Bukovského	60
2.8 Seminár a všeličo okolo neho	64
2.9 Seminárne nostalgie	66
2.10 Matematika, postrach alebo poézia?	68
3 Najdôležitejšie vyriešené matematické problémy	71
Referencie	82
4 Budúcnosť seminára	83

PREDHOVOR

Novodobá slovenská matematika nemá príliš dlhú históriu. Jej počiatky siahajú do 30-tych rokov 20. storočia a veľmi úzko súvisia so vznikom slovenských vysokých škôl. Prvé počiatky novodobej histórie vysokého školstva na východnom Slovensku siahajú do roku 1937, keď bola zriadená Štátna vysoká škola technická Dr. Milana Rastislava Štefánika v Košiciach, ale skutočnému rozvoju vysokoškolskej matematiky na východe Slovenska dochádza až koncom 50-tych a začiatkom 60-tych rokov. Veľkým impulzom v jej rozvoji bol príchod významných matematikov ako prof. Cyril Palaj, prof. Josef Korous, prof. Ernest Jucovič a prof. Igor Kluvánek, ktorí výraznou mierou pomohli v budovaní košickej matematickej školy.

A práve vďaka nim a ich študentom vznikajú významné impulzy pre rozvoj matematiky prostredníctvom seminárov z oblasti teórie množín a topológie, ktorý založil a dlhé roky viedol prof. Lev Bukovský, Košický kombinatorický seminár, ktorý založil prof. Ernest Jucovič a po ňom dlhé roky viedol prof. Stanislav Jendroľ. Práve on stál pri zrode významného medzinárodného workshopu Cycles and Colourings v roku 1992 a neskôr pri vzniku spoločného fóra pre ľudí profesionálne sa zaoberajúcich matematikou žijúcich na východe Slovenska - Konferencie košických matematikov v Herľanoch.

Je samozrejme veľmi ťažké zachytiť podrobný, celkový a úplný zoznam všetkých aktivít a preto sa chceme zamerať len na tieto 3 najvýznamnejšie podujatia, ktoré výraznou mierou ovplyvnili smerovanie matematiky nielen na východe Slovenska, ale trúfam si povedať, že vo svetovom merítku:

- Medzinárodný seminár z teórie množín a topológie,
- Košický kombinatorický seminár a medzinárodný workshop Cycles and Colourings,

- Konferencia košických matematikov - Herľany.

Tieto podujatia a hlavne ľudia, ktorí ich organizovali a aj sa ich aktívne zúčastňovali pomohli vychovať a rozvíjať niekoľko generácií matematikov, učiteľov matematiky.

Inšpiráciou napísania práve o košickej matematickej škole boli rozhovory s prof. Levom Bukovským a prof. Stanislavom Jendrolom pri príprave a vzniku publikáciách o nich, v rámci Edície Osobnosti slovenskej matematiky. V tejto publikácii približujeme prvé z podujatí, Košickú matematickú školu teórie množín a topológie, seminár prof. Leva Bukovského. Ako vznikol? Najlepšie to môžeme ilustrovať slovami prof. Leva Bukovského z knihy Osobnosti slovenskej matematiky:

Hneď v prvých rokoch môjho pôsobenia v Košiciach som sa snažil zorganizovať seminár z teórie množín. Zistil som, že problematika bola pre študentov veľmi abstraktná a šikovnejší študenti už boli obsadení inou problematikou. Preto sa to podarilo až začiatkom sedemdesiatych rokov, lebo som zvolil iný postup. Vopěnkov seminár mal úzke kontakty s poprednými pražskými topológmi, a teda som mal informácie o niektorých aktuálnych problémoch množinovej topológie. Mojej prvej ašpirantke Eve Fridrichovej-Butkovičovej som dal menej abstraktný problém týkajúci sa určitého usporiadania ultrafiltrov na množine prirodzených čísel. Eva bola veľmi úspešná a dosiahla netriviálne výsledky. Pribudli ďalší ašpiranti, prišiel Martin Gavalec, Roman Frič, Peter Vojtáš. Tak vznikol seminár.

Na záver by som chcel poďakovať všetkým, ktorí prispeli do uvedenej publikácie svojimi spomienkami a pohľadom na uvedený seminár. Osobitná veľká vďaka patrí doc. Zuzane Bukovskej, bez ktorej pomoci, zánietenosti a rád by uvedená publikácia určite nevznikla. Osobitná veľká vďaka patrí aj RNDr. Jaroslavovi Šupinovi, ktorý aj napriek pracovnej vyťažnosti si našiel čas a prispel kľúčovými príspevkami a pevne veríme, že bude ďalej pokračovať a vytvárať budúcnosť uvedeného seminára spolu so svojimi najbližšími spolupracovník-

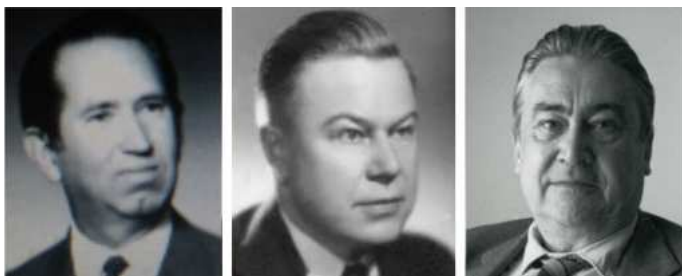
mi. Vďaka patrí aj agentúre KEGA, s ktorej finančnou podporou sa podarilo vydať uvedenú publikáciu.

Ružomberok, august 2023

Štefan Tkačik

ÚVOD

Po založení Prírodovedeckej fakulty na UPJŠ v roku 1963, bola výučba matematiky zabezpečená externými pracovníkmi z VŠT v Košiciach a z iných vysokých škôl v Československu. Vybudovaním katedry matematiky bol roku 1965 poverený prof. Cyril Palaj z Vysokej školy drevárskej vo Zvolene. Po založení katedry sa stal jej prvým vedúcim. Neskôr z Vysokej školy dopravnej v Žiline prišiel aj prof. Josef Korous a pôvodná katedra sa rozdelila na dve. Jednu viedol naďalej prof. Palaj a druhú viedol prof. Korous.



Obrázok 1: Cyril Palaj, Josef Korous, Igor Kluvánek.

Roku 1964 prišiel do Košíc Igor Kluvánek z Elektrotechnickej fakulty VŠT v Bratislave. Pri budovaní katedry matematiky zohral nemalú úlohu. Ako interný pracovník novozaloženej Prírodovedeckej fakulty priťahoval nadaných absolventov matematiky z Prahy, Bratislavy a iných vysokých škôl, ako aj pracovníkov SAV a ČSAV. Po vybudovaní katedry Igor Kluvánek oslovoval a zásoboval mladých kolegov a študentov matematickými problémami, na ktorých pracoval. Táto práca na katedre nemala charakter seminára. Žiaľ, Igor Kluvánek roku 1967 odišiel do Austrálie na dvojročný pracovný pobyt, prišiel rok 1968 s ruskými tankami a normalizáciou. Igorova pracovná zmluva neumožňovala skrátenie jeho pracovného

pobytu, preto Husákovej výzve, aby sa všetci vrátili domov, lebo „hranice nie sú korzo“, nemohol vyhovieť. Jeho mladí košíckí žiaci sa v podstate rozutekali do sveta.

Igorovi Kluvánkovi sa roku 1965 podarilo presvedčiť Leva Bukovského z Matematického ústavu ČSAV a jeho manželku Zuzanu z Fakulty jadrovej a teoretickej fyziky ČVUT, prísť pracovať do Košíc, s prísľubom dekana prof. Vladimíra Hajka, že sa mu umožní s Prahou naďalej úzko pracovať. Lev Bukovský, hneď po príchode začal organizovať seminár z teórie množín, ako pokračovanie seminára Petra Vopěnku, v ktorom dosiahol pozoruhodné výsledky a mal plno nápadov a nevyriešených problémov. Neskôr sa v seminári objavili problémy z množinovej topológie, na ktorých Lev pracoval s poprednými topológmi, ktorých viedol Dr. Zdeněk Frolík. Tak sa naplno začal rozbiehať seminár, pre ktorý sa v matematickej komunite ujal názov „*Košická škola teórie množín a topológie*“.

Na novovzniknutej Katedre matematiky Prírodovedeckej fakulty UPJŠ od roku 1966, ako externý pracovník, pôsobil Ernest Jucovič z Pedagogickej fakulty v Prešove, kde viedol seminár z diskkrétnej geometrie. Keď roku 1970 nastúpil na Katedru matematiky ako interný pracovník, celý problém na ktorom pracoval priniesol so sebou. Na Katedre matematiky Prírodovedeckej fakulty UPJŠ založil seminár s názvom „*Kombinatorické štruktúry*“.

S pribúdajúcimi internými pracovníkmi na Katedru matematiky prichádzali nové problémy, na ktorých oni pracovali, a tak vznikali a tiež zanikali nové semináre. Prvé dva semináre, ktoré na začiatku budovania Katedry matematiky na Prírodovedeckej fakulte založili Lev Bukovský a Ernest Jucovič naplno žijú dodnes.

HISTÓRIA SEMINÁRA

Seminár vznikol vďaka neúnavnej práci a iniciatíve prof. Leva Bukovského. V tejto jeho snahe, v takmer 50-ročnej histórii, mu pomáhalo v spoluorganizovaní alebo veľmi aktívnej účasti viac ako 26 spolupracovníkov. Nie všetci nám dnes môžu priblížiť uvedené chvíle, ale považujeme za veľmi dôležité zachytiť najdôležitejšie historické medzníky a udalosti, ktoré sa udiali za dané obdobie existencie seminára. Pri jeho začiatkoch stál prof. Peter Vojtáš, ktorý vo svojom príspevku aj znázorňuje hlavne československú históriu týkajúcu sa tejto oblasti matematiky. Priblíženie podmienok pre vznik seminára prof. Leva Bukovského, ako aj niečo zo zákulisia vzniku, opisuje vo svojom príspevku jeho celoživotná spolupútnička a milujúca manželka doc. Zuzana Bukovská. Veľký diel na spoluorganizovaní uvedeného seminára od 80-tych rokov do súčasnosti má RNDr. Miroslav Repický a viac ako posledných 10 rokov RNDr. Jaroslav Šupina. Obaja v súčasnosti pokračujú v myšlienke spájania a výmeny výsledkov výskumnej práce v danej oblasti najmä organizovaním seminára po prof. Levovi Bukovskom.

1.1 HISTÓRIA SEMINÁRA

Jaroslav Šupina, Miroslav Repický

Profesor Bukovský sa snažil sformovať seminár z teórie množín hneď v prvých rokoch svojho pôsobenia v Košiciach. Seminár v pravidelnej a nepretržitej forme pravdepodobne začal existovať až v druhej polovici sedemdesiatych rokov.

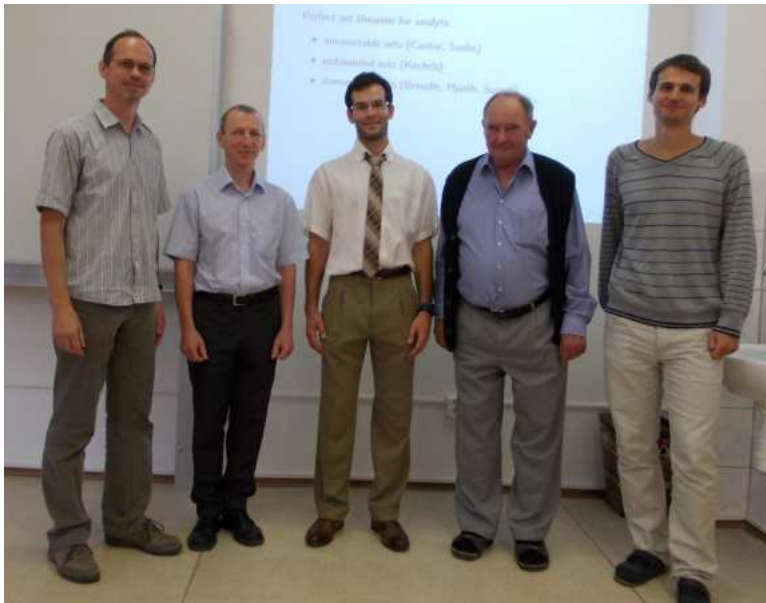
Za prvú účastníčku seminára môžeme považovať Evu Fridrichovú-Butkovičovú. Od roku 1978 sa postupne pridali Peter Vojtáš, Martin Gavalec a Roman Frič. Odvtedy bol seminár neustále úzko spätý s novovzniknutým košickým detašovaným pracoviskom Matematického ústavu SAV, keďže veľká časť členov seminára bola jeho zamestnancami. Po dvoch rokoch pribudli postupne ďalší študenti Eva Copláková-Hartová a krátko Peter Slodička a Sultan Niazman.

Seminár sa spravidla konal v pracovni profesora Bukovského, spočiatku na Komenského 14 a neskôr po dokončení novej budovy PF UPJŠ, na Jesennej 5. V roku 1982 pribudol Miroslav Repický, ktorý zotrval v seminári dodnes. Približne jeden rok strávil na seminári Klaas Pieter Hart počas svojho postdoktorandského pobytu na PF UPJŠ. Krátko po jeho odchode seminár opustila i jeho manželka. V polovici osemdesiatych rokov prišiel Ladislav Spišiak (ako úspešný riešiteľ študentskej súťaže bol na seminári známy oveľa skôr), Jaroslav Skřivánek z Bratislavy a nejaký čas bola na seminári Blanka Rosenauerová-Semančíková. Koncom osemdesiatych rokov bol na seminári tiež Peter Nikodem, z Bratislavy do Košíc prišiel Leonard Pavlík a nakrátko sa z Afganistanu vrátil i Sultan Niazman, ktorý na radu profesora Bukovského zmenil orientáciu svojho výskumu.

Začiatkom deväťdesiatych rokov sa na nejaký čas dostal seminár do útlmu, čo bolo spôsobené viacerými okolnosťami. Peter Vojtáš získal Humboldtovo štipendium v Berlíne, Miroslav Repický absolvoval niekoľkomesačný postdoktorandský pobyt v Izraeli, Eva Butkovičová sa odsťahovala do Veľkej Británie a profesor Bukovský sa stal rektorom univerzity. V roku 1993 úspešne ukončili svoje diplomové práce u profesora Bukovského Peter Eliaš a Stanislav Krajčí. Seminár istým spôsobom reštartoval ich príchodom z náhradnej vojenskej služby o rok neskôr.

Približne od roku 1999, ešte pred napísaním svojej diplomovej práce, sa na viac ako desať rokov stal súčasťou seminára Jozef Haleš. V roku 2006 sa k semináru pridali diplomant Michal Staš a bakalár Jaroslav Šupina, ktorí aj neskôr pod ve-

dením profesora Bukovského, ako poslední, absolvovali doktorandské štúdium. K ďalšej generácii účastníkov seminára v prvej polovici posledného desaťročia patrí Michal Dečo a v druhej polovici Viera Šottová-Gavalová a Dávid Uhrik. Najmladším účastníkom je súčasný doktorand Adam Marton. Aktuálne je v seminári aj Miguel Antonio Cardona Montoya z Kolumbie v rámci svojho postdoktorandského pobytu na UPJŠ.



Obrázok 2: Po úspešnej obhajobe Michala Deča, doktoranda Miroslava Repického, v roku 2015 (Peter Eliaš, Miroslav Repický, Michal Dečo, Lev Bukovský, Jaroslav Šupina)

V minulosti mal seminár úzke kontakty s rôznymi pracoviskami v rámci spolupráce medzi univerzitami a akadémiami vied v Prahe, v Budapešti, vo Varšave a vo Wroclawi. Po roku 1989 vznikala aj menej formálna spolupráca s ďalšími matematikmi zo zahraničia. V rámci toho sa uskutočňovali výmenné pobyty, z ktorých niektoré vyústili do spoločného vedeckého výskumu s publikačným výstupom (Ireneusz Reclaw, Krzysztof Ciesielski, Natasha Kholshchevnikova, Winfried Just, Sakae Fuchino, Pratulananda Das, atď.). Význam-

ný vplyv na seminár mala pražská škola z teórie množín a topológie. Zimná škola z abstraktnej analýzy, ktorú organizoval Zdeněk Frolík a neskôr Bohuslav Balcar a Petr Simon, bola každoročne dôležitou udalosťou pre celú komunitu vo východoeurópskom regióne. Dodnes je pre nás dôležitá.

Seminár sa počas svojej existencie v spolupráci s PF UPJŠ a MÚ SAV podieľal na organizovaní nasledujúcich medzinárodných konferencií:

- Teória množín a jej vzťah k topológii a logike (pri príležitosti 25. výročia vzniku UPJŠ), 10.–14. september 1984 Zemplínska Šírava;
- Základy matematiky a informatiky, 7.–12. september 1987 Zemplínska Šírava;
- Foundations of Mathematics and Computer Science, 15.–19. júl 1996 Košice;
- Teória množín a topológia v Košiciach v kontexte československej matematiky (pri príležitosti životného jubilea profesora Leva Bukovského), 16.–17. september 2009 Košice;
- Set-theoretic methods in topology and real functions theory, dedicated to the 80th birthday of Lev Bukovský, 9.–13. september 2019 Košice.

Počas dvoch pandemických rokov sa seminár takmer výlučne konal v online forme alebo aj v kombinácii s prezenčnou formou. Táto forma na druhej strane umožnila, aby sa niekoľko stretnutí uskutočnilo v medzinárodnom prostredí s prednášajúcimi nachádzajúcimi sa v tom čase vo Viedni, v Gdaňsku, v Delfte alebo v Prahe. Pokiaľ to situácia umožňovala, seminár sa počas semestra konal vždy raz týždenne. V súčasnosti sa ho pravidelne zúčastňujú: Peter Eliaš, Adam Marton, Jaroslav Šupina, Miroslav Repický a Miguel Antonio Cardona Montoya (Viera Gavalová je v tomto čase na materskej dovolenke).



Obrázok 3: Viera Gavalová, r. Šottová, blahoželá pánovi profesoro-
vi Levovi Bukovskému k osemdesiatym narodeninám
na výročnej konferencii v roku 2019.

1.2 SEMINÁR, DRUHÁ RODINA PROF. LEVA BUKOVSKÉHO

Zuzana Bukovská

Mám problém, ako v mojom príspevku oslovovať prof. Bukovského. Bol mojim celoživotným spolupútnikom, dôverníkom, priateľom, milujúcim manželom. Bol to môj Leo.

Pred 65 rokmi, presne 17. novembra 1957, bol v Bratislave na návšteve novozvolený československý prezident Antonín Novotný. Celá Bratislava ho nadšene vítala mávajúc vlajkami. Povinne. Keď sa mávanie vlajkami chýlilo ku koncu, niekoľko spolužiakov utiekalo do Univerzitnej knižnice obsadiť miesta pre ostatných. Mne sa ušlo miesto vedľa Lea. Od toho dňa to miesto bolo moje. Študovali sme sediac vedľa seba celé vysokoškolské štúdium. Atmosféra v tom čase bola taká, že Univerzitná knižnica bola na prasknutie. Chodili tam študovať mimobratislavčania bývajúci na privátoch, aj Bratislavčania bývajúci doma. V dohodnutých intervaloch boli dopredu dohodnuté pauzy, alebo pauzy na mrknutie oka. Na chodbe pred študovňou sa potom rozoberali problémy, ktoré vznikli, diskutovalo sa.



Obrázok 4: Lev Bukovský a Zuzana Bartošová-Bukovská počas štúdií 1956-1961, Bratislava.

Leo, ako vysokoškolák zistil, že na Filozofickej fakulte UK prof. Vojtech Filkorn vedie seminár na tému „*Vývoj a štruktúra logiky v dejinách prírodných vied*“. Leo ten seminár pravidelne navštevoval a tvrdil, že to bol seminár pre jeho rozhľad veľmi užitočný.

Profesor Milan Kolibiar sa snažil na Prírodovedeckej fakulte UK založiť seminár z matematickej logiky. Súdruhovia pojmu nerozumeli, videli v tom pavedu, zľakli sa a nedovolili. Prof. Kolibiar tak musel svoj seminár viesť tajne. V obchode Sovietska kniha pritom práve vyšiel preklad knihy od S. C. Kleeneho: „*Matematická logika a teória algoritmov*“. Leo knihu podrobne preštudoval už v druhom ročníku.



Obrázok 5: Milan Kolibiar, Ladislav Svante Rieger,
Petr Vopěnka, Zdeněk Frolík.

V štvrtom ročníku išiel Leo do Prahy na celoštátne kolo ŠVOČ s prácou z matematickej logiky so silnými výsledkami. Leo získal 2. miesto, víťazom bol Břetislav Novák z Matematicko-fyzikální fakulty UK. Prácu recenzoval Dr. Ladislav

Svante Rieger, ktorý v Prahe na Matematickom ústave ČSAV práve zakladal Oddelenie matematickej logiky. Leovi okamžite ponúkol miesto. Žiaľ, skôr než Leo po 26 mesačnej povinnej vojenčine nastúpil, doc. Rieger nečakane zomrel. V jeho práci pokračoval Peter Vopěnka, odborný asistent na Matematicko-fyzikálnej fakulta Karlovej univerzity ktorému sa podarilo v roku 1963, keď sa Leo z vojenčiny vrátil, zorganizovať na Matematickom ústave ČSAV seminár z teórie množín. Prví členovia seminára boli Lev Bukovský a Petr Hájek, vysokoškolskí absolventi, ostatní členovia boli nadaní študenti Matematicko-fyzikálnej fakulty Karlovej univerzity, ktorých z fakulty do seminára postupne získaval. Boli to Bohuslav Balcar, Petr Hájek, Tomáš Jech, Aleš Pultr, Zdeněk Renc, Petr Simon, Antonín Sochor, Petr Štěpánek. Žiaľ, z menovaných žije už iba Tomáš Jech z USA. V seminári vládla plodná pracovná i spoločenská atmosféra, dosahovali sa vynikajúce výsledky. Všetci jej členovia sú teraz svetovo uznávaní odborníci.



Obrázok 6: Z rodinnej zbierky, zľava: Bohuslav Balcar, Petr Štěpánek, Dagmar Harmancová, Petr Hájek, Pavla Jechová, Petr Vopěnka, Kamila Bendová, Anton Sochor, Anna Sochorová, Lev Bukovský, Tomáš Jech.

Po príchode do Košíc Leo spoluprácu s pražským seminárom neprerušil a trvala až do konca jeho života. Hneď,

ako sme prišli do Košíc, začal Leo pracovať na organizovaní seminára z teórie množín. Oslovil študentov aj mladých kolegov, ktorí však boli už orientovaní na inú problematiku. Z oslovených študentov to boli napr. Jozef Bílý, Olga Kulcsárova, Štefan Kulcsár. Ako sám Leo uznal, jeho problematika bola pre mladých študentov veľmi abstraktná, ťažká. Po roku 1970 sa začal venovať množinovej topológii a pri organizovaní seminára sa tomu prispôbil. Seminár, ktorý založil, sa nazýval „Seminár z teórie množín“, ale prevažovala v ňom topológia, nekonečná kombinatorika a teória reálnych funkcií. Do seminára začali chodiť študenti Eva Butkovičová, Eva Copláková, Jozef Ondáš, Blanka Rosenauerová, pridal sa Martin Gavalec, prišli kolegovia zo SAV Roman Frič, Peter Votáš a ďalší. Zo seminára vzišli hodnotné, celosvetovo uznávané práce. Začiatkom osemdesiatych rokov sa v medzinárodnej matematickej komunite začal používať termín „Košická škola teórie množín a topológie“.



Obrázok 7: Blanka Rozenauerová-Semančíková, Miroslav Repický, Peter Vojtáš, Ladislav Spišiak, Peter Nykodém, Roman Frič, Jaroslav Skřivánek, Lev Bukovský.

Témy seminára sa časom menili, problémy sa rozrastali a členili, starí účastníci sa osamostatňovali, noví prichádzali. Seminár kontinuálne žije dodnes. Podrobnejšiu históriu Leovho seminára prenechávam iným.

Ja som členom Leovho seminára nikdy nebola. Problémy, ktorými sa seminár zaoberal, sa mi zdali ťažké a venovala som sa inej problematike. Do práce seminára som však prispela cez tzv. malé množiny, ktoré sú v matematickej analýze známe. Francúzsky matematik J. Arbault v roku 1952 dokázal, že každá spočítateľná podmnožina uzavretého intervalu $[0, 1]$ je malá množina vzhľadom na bodovú konvergenciu trigonometrického radu. V monografii (Bari, 1961), je iný dôkaz, ktorý využíva silnejšiu konvergenciu ako je bodová. Všimol si to Peter Vojtáš a z Leovho seminára som v roku 1985 dostala úkol túto konvergenciu preskúmať. Dovtedy, taký typ konvergenzie v analýze nebol známy. Nazvali sme ju kvázinormálna konvergencia (**quasinormal convergence**). Následne vznikli nové vzťahy medzi konvergenciami, nové malé množiny a nová hierarchia tried malých množín. Neskôr sa nám dostala do rúk skoršia práca Á. Császára a M. Laczkovicha, ktorí túto konvergenciu nazvali „equal convergence“ a kde skúmali jej vzťah k diskkrétnej konvergencii. Keďže sme v skúmaní tejto konvergenzie dosiahli viac výsledkov, náš názov „quasinormal convergence“ rešpektovali a názov sa ujal.

Takže, tak trochu sa cítim akýmsi utajeným členom Leovho seminára, takým neplnokrvným členom. Seminár bol pre Lea jadrom a elixírom života. Päť dní pred odchodom do matematického neba, keď už nevládal skoro nič, na online seminári ožil, referovaný problém vnímal a bol šťastný.

REFERENCIE

Bari, N. K. (1961). *Тригонометрические ряды*. Moskva.

Niečo o autorke:

Doc. RNDr. Zuzana Bukovská, CSc. absolvovala štúdiá matematiky na Prírodovedeckej fakulte Komenského univerzity v Bratislave. V roku 1961 nastúpila na katedru matematiky Elektrotechnickej fakulty VŠT v Bratislave. Po sobáší s Levom Bukovským v roku 1963 ho nasledovala do Prahy, kde pracovala na Katedre matematiky Fakulty jadrovej a teoretickej fyziky ČVUT. Väčšinu svojho profesijného života pracovala na Katedre matematiky Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach. Zo začiatku sa venovala teórii miery a integrálu, neskôr teórii reálnych funkcií, kde dosiahla pekné výsledky cez tzv. malé množiny.

Adresa autorky:

Adresa: Slobody 19, 040 11 Košice
e-mail: zuzana.bukovska@gmail.com

1.3 HISTÓRIA SEMINÁRA OČAMI PRVÝCH ÚČASTNÍKOV

Peter Vojtáš

Od 1969 do 1974 som na MFF UK v Prahe študoval odbor matematika, špecializácia teoretická kybernetika, doktorát som obhájlil 1981. V Prahe som navštevoval Vopěnkov seminár z polomnožín a neskôr fenomenologický seminár. Veľa mi pomohol seminár s B. Balcarom, ktorý bol zameraný na teóriu množín a topológiu. Od 1978 som pracoval na dislokovanom pracovisku MÚ SAV v Košiciach (DP MÚ SAV) a externe učil na PF UPJŠ (pokiaľ sa pamätám) rekurzívne funkcie a Turingove stroje (neskôr aj Logické programovanie). Po roku 1989 som sa venoval fuzzy logickému programovaniu. Zlom nastal, keď jeden oponent v zamietavom posudku napísal, že síce tie vety s dôkazmi sú pekné, ale odkiaľ máte tie programy=znalosti. Ale fuzzy dát na učenie pre indukciu bolo málo. Väčšiu časť výskumu po roku 1989 som venoval overovaniu modelov (vyhovujúcich zadaniu/potrebe) na dátach pomocou experimentálnych prototypov, ktoré väčšinou naprogramovali študenti a následnému porovnaniu s výsledkami iných autorov. Pomohla preferenčná interpretácia fuzzy dát - a naraz ich bolo veľa v doporučovacích systémoch. Väčšinu týchto výsledkov som dosiahol s doktorandmi (<https://www.mathgenealogy.org/id.php?id=129822>), pekné výsledky dosiahli aj v semantizácii webu.

Profesor Lev Bukovský pôsobil na PF UPJŠ od roku 1965 a prvýkrát som ho stretol na sústreďení matematickej olympiády v Slovenskom raji ako stredoškolač (1966-69). Na práci vedeckého seminára prof. Bukovského o teórii množín a topológii som sa zúčastňoval (pokiaľ sa dobre pamätám) od roku 1980 do 1992?. Keď sa spätne dívam na Leov seminár, vidím ho v súvislosti celkového vývoja československej matematiky po prvej svetovej vojne a špeciálne po druhej.

Nezanedbateľnou podmienkou odborného rastu členov seminára boli trvalé kontakty s pražskou matematikou, zimné

školy¹ a konferencia Toposym². V roku 2022 prof. van Mill v prednáške na Toposyme osobitne zdôraznil aj Leov prínos (Vid' foto obrázok 8). Mne osobne veľa dali semináre Banachovho centra vo Varšave³ a pobyty na Ústave matematiky Wroclawskej Univerzity⁴ a Matematickom ústave Maďarskej akadémie vied⁵.



Obrázok 8 : Organizačný výbor konferencie.

Zdroj: http://www.toposym.cz/slides/slides-van_Mill-112.pdf.

¹ https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/701361/ActaCarolinae_038-1997-2_1.pdf

² <http://www.toposym.cz/>

³ <https://www.impan.pl/pl/instytut/historia>

⁴ <https://www.math.uni.wroc.pl/>

⁵ <https://www.renyi.hu/en/>

Špecifickou podmienkou vzniku seminára bol vznik DP MÚ SAV v Košiciach v roku 1977. Väčšina účastníkov Leovho seminára v prvých rokoch bola pracovníkmi SAV. Vedúcim DP MÚ SAV bol akademik Ján Jakubík, ktorému sme na pravidelných poradách aj vecne (matematicky) referovali o našej činnosti.

Čomu sme sa venovali sa dá najlepšie ilustrovať publikáciami⁶. Seminár bol vynikajúcou príležitosťou prezentovať a diskutovať aktuálne znalosti v bezpečnej, tolerantnej a otvorenej atmosfére. Pamätám sa na jeden podnet, keď ma Leo upozornil na Tarského problém definícií konečnosti bez axiómy výberu, vznikla z toho publikácia s Lacom Spišiakom⁷. Zvlášť mi utkvelo v pamäti, že Janko Borsík⁸ (žiak profesora Šaláta, zamestnanec DP MÚ SAV v Košiciach), aj keď nebol členom Leovho seminára, ma upozornil na publikácie na pomedzí reálnej analýzy a teórie množín. Jedna bola publikácia Niny Cholščevnikovej (Malychin a Kholsevnikova, 1980), vznikli z toho v seminári viaceré publikácie. Ďalšia bola práca prof. Šaláta (Belasová J., 1989), ktorá ma motivovala k štúdiu asymptotík absolútnej konvergenencie / divergenencie radov. Z tejto problematiky radov nakoniec vznikol problém o asymptotike rozkladov prirodzených čísiel na konečné množiny, ktorý vyriešil môj jediný doktorand z teórie množín, vtedy člen Leovho seminára, Stano Krajči (Krajči, 1999). V závere prikladám, na obrázku 9, grafické znázornenie hlavne československej histórie aj s mojimi ďalšími spoluautormi a inšpirátormi z tej doby. Zobrazujem aj príbeh emancipácie keď sa z filozofie odčlenili prírodné vedy a z nich následne matematika a fyzika. Nezakreslujem dôležitý pobyt pražských matematikov (Zimmermann, Vlach, Vlášek, Goralčík) na Lomonosovovej univerzite (1960-63), ktorý zanechal stopy aj v Košiciach. Podobný prehľad by možno bol cenný aj pre celú košickú či slovenskú matematiku a ďalšie semináre

6 <https://mathscinet.ams.org/mathscinet>

7 <https://eudml.org/doc/13713>

8 https://im.saske.sk/borsik/index_slov.html

(napr. Jucovič, Jakubík, ...). Ale medzitým sa ťažisko matematického záujmu posúva inam⁹.

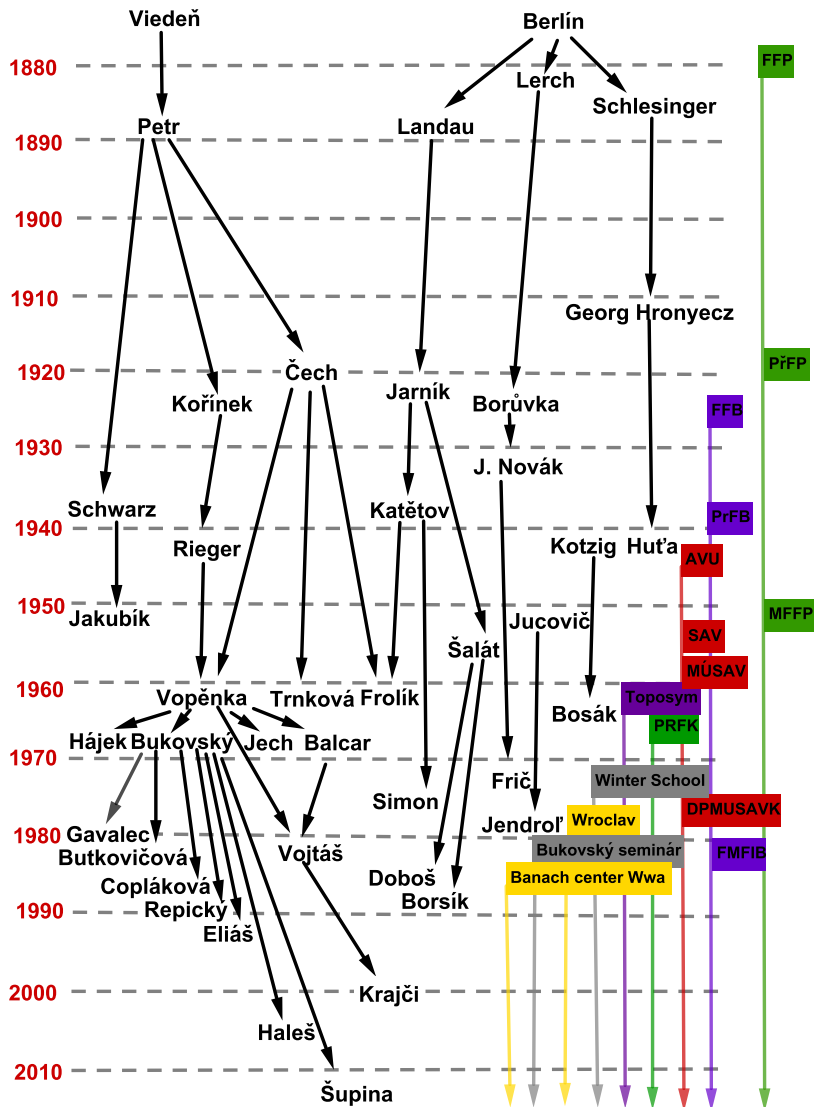
Prof. Bukovský ku koncu 80-tych rokov organizoval na Šírave konferencie FMCS – Foundations of mathematics and computer science (s bohatou účasťou z Prahy Frolík, Balcar, Simon, Hájek). Mne FMCS osobne veľmi pomohlo, lebo jeden rok som prezentoval topologický výsledok, v ktorom bola chyba (na chybu prišli poslucháči z Prahy, bol to pre mňa obrovský šok). O rok neskôr som na Šírave prezentoval zárodoky Galois-Tukey connections (motivované vecami čo som sa naučil vo Wroclawi), čo vtedy zaujalo prof. Frolíka a potom som v tom pokračoval na pobyte Humboldtovej nadácie (1990 - 91) (Vojtáš, 1993) .

Z nematematických zážitkov mi utkveli v pamäti dva. Prvý, boli sme vo Wroclawi v 1981, tesne pred vojnovým stavom (13.12.81). S Alenou Vencovskou (Eva Butkovičová ma upozornila, že tam bola tiež) sme boli navštíviť železničiarov, ktorí v hladovke chceli donútiť vládu k registrácii Solidarity. Už dva týždne hladovali, pili len vodu s vitamínmi. Bola tam úplne mystická atmosféra, už len ležali, boli tam nejakí lekári, chlapi boli rozhodnutí zomrieť.

Druhý, z FMCS mi ešte utkvela prednáška prof. Petra Hájka o Gödelovom dôkaze existencie Boha¹⁰ a následná rôznorodá reakcia publika. Aj všeobecnú, ľudskú atmosféru pražských aj Leovho seminára najlepšie ilustruje, že sa nič (politicky) vážne nestalo. Atmosféra bola taká, že sa ľudia na týchto seminároch nebáli otvorene povedať svoje (aj politické) názory a nikomu sa nič nestalo. To sme ešte netušili, že raz budeme slobodní aj mimo seminárov.

⁹ https://en.wikipedia.org/wiki/Fields_Medal

¹⁰ <https://www.scientificamerican.com/article/can-god-be-proved-mathematically/>



Obrázok 9 : Mená sú umiestnené orientačne v roku obhajoby doktorátu, spojenia, kto bol školiteľ (občas neznámy).

Zdroj: <https://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/>, AMS, Wiki.

Vysvetlivky k obrázku 9

- FFP Filozofická fakulta Univerzita Karlova, rozdelenie Karlo-
-Ferdinandovej univerzity 1882,
- PŘFP Přírodovědecká fakulta Univerzita Karlova, vznik 1920,
- MFFP Matematicko-fyzikální fakulta Univerzita Karlova, vznik
1952,
- FFB Filozofická fakulta Univerzita Komenského v Bratislave,
vznik 1921,
- PRFB Přírodovědecká fakulta Univerzita Komenského v Bra-
tislave (v tom čase Slovenská univerzita), vznik 1940,
- FMFIB Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzita
Komenského v Bratislave, vznik 1981 ako MFF,
- AVU Slovenská akadémia vied a umení, vznik 1942,
- SAV Slovenská akadémia vied, vznik 1953,
- MUSAV Matematický ústav Slovenskej akadémie vied, vznik
1959,
- DPMUSAV dislokované pracovisko MÚ SAV v Košiciach, vznik
1978,
- PRFK Přírodovědecká fakulta UPJŠ v Košiciach, vznik 1963.

REFERENCIE

- Belasová J. Ewert J., Šalát T. (1989). "On the effectiveness of
tests for the absolute convergence of infinite series". In: *Bull.
Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie (N. S.)* 33, s. 3–8.
- Krajčí, Stanislav (1999). "Two remarks on partitions of ω with
finite blocks". In: *MLQ Math. Log. Q.* 45.3, s. 415–420.
- Malychin, V. I. a N. N. Kholsevnikova (1980). "Independen-
ce of two set-theoretic statements in the theory of summa-
tion". In: *Mat. Zametki* 28.6, s. 869–882.

Vojtáš, Peter (1993). "Generalized Galois-Tukey-connections between explicit relations on classical objects of real analysis". In: *Israel Math. Conf. Proc. Set theory of the reals 6*. Ramat Gan, s. 619–643.

Niečo o autorovi:

Prof. RNDr. Peter Vojtáš, DrSc., v r. 1974 absolvoval štúdium Teoretickej kybernetiky na MFF UK v Prahe. Bol členom Bukovského seminára od roku 1980 s dozvukmi do konca deväťdesiatych rokov. Jeho profesionálny život sa dá rozdeliť na štyri obdobia, najlepšie ohraničené publikáciami: Prvý, teória množín, topológia, reálna analýza (1977-1999); druhý, fuzzy bez dát (1995-2006); tretí, experimenty s dátami a prototypmi (od 2004); a na záver, IT projekty v podnikovej sfére (od 2020). Pri špeciálnych príležitostiach zvykne navštíviť Košice a zastaviť sa na seminári.

Adresa autora:

Katedra softwarového inžinýrství, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova, Malostranské nám. 2/25,
Praha 1, Česká republika
e-mail: pvojtas@gmail.com

SPOMIENKY ÚČASTNÍKOV SEMINÁRA

V tejto časti prinášame príspevky účastníkov, ale aj spoluorganizátorov seminára z teórie množín a topológie, ktorý založil prof. Lev Bukovský.

2.1 LEVOVE EVY SPOMÍNAJÚ

Eva Butkovičová a Eva Copláková

„Moje Evy“ – tak nás volal profesor Lev Bukovský. Bola som prvou Levovou aspirantkou, dva roky po mne prišla Eva Copláková. Odvtedy sme sa stali nerozlučné, zdieľali sme spoločnú pracovňu, chodili sme spolu na konferencie, kurzy, semináre a kamarátili sa. Preto aj teraz sme dali hlavy na diaľku dokopy a píšeme tento príspevok spolu. Ešte bola tretia Eva – Eva Trenklerová, ale my sme ju už nestretli. Odišli sme z Košíc pred viac ako tridsiatimi rokmi, tak prosíme o zhovievavosť, ak sa naše spomienky v niektorých detailoch líšia od vašich.

EVA FRIDRICHOVÁ – BUTKOVIČOVÁ O SEBE:

Neviem ako sa stalo, že som mala šťastie byť Levovou prvou aspirantkou. Študovala som na PF UPJŠ matematiku – chémiu v rokoch 1973 – 1978 a s Levom som mala len jednu prednášku z logiky v prvom ročníku. Matematiku som ale milovala, nadchýnala ma a chcela som vedieť viac a spoznať matematický svet bližšie. V tretom ročníku som nabrala odvalu a prejavila záujem o prácu v ŠVOČ a na moje veľké prekvapenie sa ma ujal sám Lev Bukovský, Buky, ako ho všetci študenti láskavo volali. Každý, kto študoval matematiku, ve-

del, že je to jednička a vzbudzoval teda príslušný rešpekt. Ja som bola na to hrdá, ale mala som aj trému. Lev sa mi príkladne venoval, stretávali sme sa pravidelne každý týždeň a on mi trpezlivo vysvetľoval teórie, o ktorých som nikdy predtým nepočula. Začala som robiť malý výskum v deskriptívnej teórii množín a v nasledujúcich troch rokoch som získavala ceny vo fakultnom a potom tretie a druhé miesto v celoštátnom kole ŠVOČ.

Diplomovú prácu som ale robila v úplne inej oblasti. V teórii ultrafiltrův. Lev nechcel, aby študenti piateho ročníka prezentovali svoju diplomovú prácu ako prácu ŠVOČ, čo bolo podľa mňa férové voči mladším študentom. To sa mi na Levovi veľmi páčilo. Nenávidel protekcionovanie a nespravodlivosť. Pred koncom štúdia sa ma opýtal, či by som chcela ostať pracovať na novootvorenej pobočke Matematického ústavu SAV v Košiciach. Bola som nadšená, aj keď plat bol nižší, ako mali moji kamaráti začínajúci učitelia.



Obrázok 10: Sultan Niazman a Eva Butkovičová.

Katedra matematiky bola vtedy v budove terajších Jezuitov na Komenského 14, kde aj Matematický ústav dostal dve miestnosti a moja pracovňa bola bývala poslucháreň o poschodie nižšie ako katedra. Iba neskôr sme sa presťahovali

na Jesennú. Vtedy sme sa s Levom stretávali snáď každý deň, keď sa dalo. Hovorili sme o všetkom možnom, nielen o matematike, veľmi sme si politicky rozumeli a Lev mi radil riešiť aj problematické situácie. Bol mojim mentorom.



Obrázok 11: Eva Butkovičová prednáša spoločný výsledok s prof. Bukovským na Zimnej škole z abstraktnej analýzy, 1981.

Pamätám sa, že sme mali problém s pivnicou, keď sme s manželom prebrali náš byt v novom bloku na Furči. Jeden sused si vymenil jeho malú, tmavú pivnicu za našu väčšiu ešte predtým, ako sme sa nasťahovali. Všimla som si to, čísla na pivnici boli prepísané a naša pôvodná zamknutá. Boli by sme sa so susedom pohádali, ale Lev mi povedal, že so susedmi sa neradno hádať. „Prepíšte čísla pivnice späť, zamknite tú pivnicu ešte so svojou zámkom a napíšte tam nápis, že niekto tú pivnicu omylom zamkol a žiadate ho, aby

si tú zámku zobral, lebo ináč ju prepílate.“ Urobili sme to a pomohlo! To bola Levova diplomacia, perfektné, mierové riešenie.

Lev mi dal naštudovať dovtedy známe výsledky o Rudinovej – Frolíkovom usporiadaní ultrafiltrov, čo riešili niektoré problémy štruktúry β -obalu prirodzených čísel. Postupne som s Levovou pomocou začala tomu rozumieť a dosahovať nové výsledky. Bol to povznášajúci pocit. Začala som publikovať a obhájila som kandidátsku dizertačnú prácu na Matematickom ústave ČSAV v Prahe.

Lev ma zoznámil s ľuďmi, ktorí pracovali v našej oblasti. Začala som chodiť na konferencie a navštívila som semináre na univerzitách v Prahe, Wroclawi, Amsterdame, ako aj Banachovo centrum vo Varšave. Vtedy sme boli za železnou oponou, za ňu sa dalo cestovať len s obrovskými problémami. Rozprávala som sa s tými najmúdrejšími hlavami v mojej oblasti výskumu vo svete. Čo si môže človek pracovne viac želať?

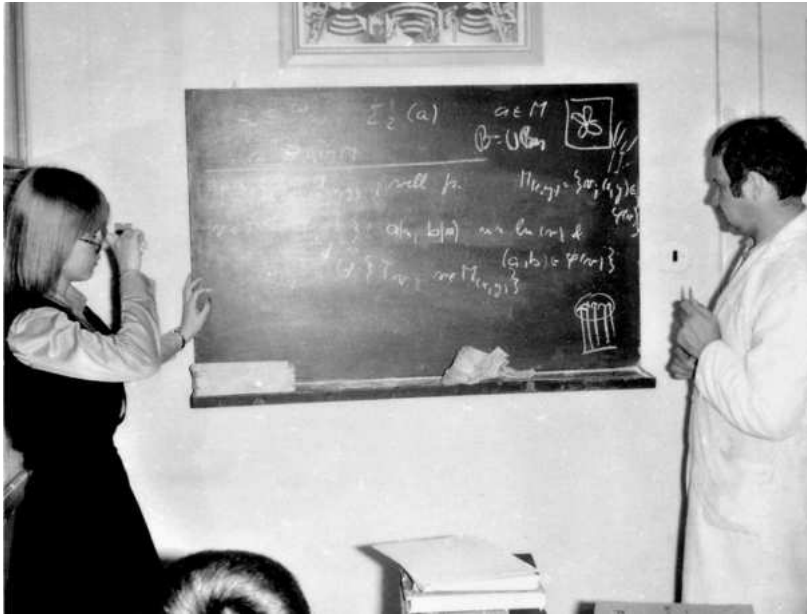
Leva som si veľmi vážila a obdivovala, a spolu s jeho manželkou Zuzkou ma v mnohom inšpirovali. Dokonca som sa dala aj na prípravu čínskeho jedla, čo oni radi varili.

Po nežnej revolúcii sa však život fundamentálne zmenil. Z Košíc som s rodinou odišla do Veľkej Británie v roku 1992 a našla som uplatnenie v inej oblasti, kde matematické a analytické myslenie je potrebné – ako programátor a programátor analytik. Aj keď som vedomosti získane u Leva viac nepoužívala, spôsob myslenia a získané pohľady na svet mi výrazne pomáhali prebýjať sa v novom, veľmi náročnom prostredí. S Levom sme naďalej ostali v kontakte.

EVA COPLÁKOVÁ O SEBE:

I always wanted to be a mathematician and this wish came true when studied mathematics at UPJS in Kosice in the academic years 1975-80.

I loved the study, mostly because of the courses taught by Lev Bukovsky. I am pretty sure that I did not miss any lecture and that I participated in all his seminars during my study.



Obrázok 12: Eva Copláková a Lev Bukovský v profesorovej starej pracovni na Komenského 14.

I learned a lot, not only about mathematics, but also what it means to be a teacher. To illustrate this: during one exam with Lev I presented my own proof of a theorem, different from the one given during the lectures. During my explanation I discovered a flaw and also that my idea could not work at all. I was sure that I had failed the exam, but the opposite was true.

In 1980 I started to work at MU SAV in Kosice. I specialised in Set Theory and worked under Bukovsky's supervision on my PhD thesis, which was mostly about forcing.

In April 1986 I moved to the Netherlands and a few months later I went to the USA where I spent the academic year 1986-87 as a visiting scholar at Miami University in Oxford, Ohio.

After returning to the Netherlands I started to work at the Technical University of Delft as a lecturer in mathematics. I taught, and still am teaching, many different courses. The legacy of Lev Bukovsky continues even in Delft where I teach Mathematical Logic and try to do it in his spirit.



Obrázok 13: Eva Copláková prezentuje.

SEMINÁR:

Seminár začal vznikať živelne od roku 1978. Lev si vždy našiel čas na debatu a postupne sa k nám pridali Peter Vojtáš, Martin Gavalec, neskôr Roman Frič. Stretali sme sa u Leva v pracovni, kde on pripravil voňavú kávu. To bol zárodok nášho seminára.

O dva roky sa pridala Eva Copláková, Peter Slodička (ktorý skoro odišiel) a Sultan Niazman – študent z Afganistanu. Keď nás už bolo viac, bolo praktické stanoviť čas stretnutia a tak sa zrodil *Seminár z teórie množín a topológie*. Začiatok teda bol medzi 1978 – 1980. Neskôr sa pridali Mirko Repický, ktorý je tam doteraz a aj ďalší študenti/absolventi, ktorí ale po čase odišli a ich mená si už nepamätáme. V roku 1984 prišiel k Levovi na ročnú stáž Klaas Pieter Hart z Holandska.

Bol to veľmi neformálny seminár, kde sa mohlo diskutovať čokoľvek a každý sa tam cítil príjemne. Hovorili sme, čo máme nové, či z matematického, rodinného, pracovného alebo politického života. Podstatou bolo, že všetci sa chceli naučiť niečo nové alebo prediskutovať s kolegami problémy, na ktoré narazili. Teda každý z času na čas prezentoval

svoju oblasť výskumu. Veľkým prínosom boli diskusie po prezentáciách, hypotézy, nápady na ďalší výskum.



Obrázok 14: Matematická sekcia fakultného kola SVK v apríli 1976. (V prvom rade zľava: Viliam Chvál, Lev Bukovský, Marián Trenkler, Ján Ohriska).

Eva Butkovičová hovorila o svojich výsledkoch v štruktúre Rudinovej-Frolíkovho usporiadania ultrafiltrov. Napríklad o ultrafiltroch s daným počtom predchodcov, o reťazoch bez dolného ohraničenia, o ultrafiltroch bez bezprostredných predchodcov, o dĺžkach vetiev. A to s dôrazom na to, že podstatou neboli len samotné nové výsledky, ale aj nové metódy, ktoré sa pri dôkazoch použili a mohli byť použité v iných oblastiach teórie ultrafiltrov.

Eva tiež hovorila o univerzálnej funkcii pre spojité funkcie v deskriptívnej teórii množín. Tiež o neporovnateľných ultrafiltroch v Rudinovej-Keislerovom usporiadaní, čo bolo iné usporiadanie v β -obale prirodzených čísel.

Eva Copláková sa venovala teórii modelov a použitiu forcingu v teórii množín. To bolo pre každého dôležité, a tak sme nejakú dobu čítali knihu (Jech, 1971), ktorá bola hlavne

venovaná metódam forcingu. Eva sa z nás tomu najviac venovala a spolu s Levom nám metódy forcingu vysvetľovali.

Seminár bol obohatený návštevami a prednáškami matematikov z iných univerzít: z Prahy to napr. boli Petr Simon, Bohuslav Balcar, Miroslav Hušek, Zdenek Frolík, z Wroclawi Bogdan Wenglorz, z Manchesteru Jeff Paris. Lev Bukovský a seminár prilákali ľudí, ktorí matematiku milovali a prirodzene sa snažili dostať do Levových kruhov. On vedel ľudí nadchnúť svojimi vedomosťami, príbehmi, uvažovaním, proste svojou osobnosťou. Seminár nás mnohému naučil, povzbudil, zabavil a mal veľký vplyv na to, akí ľudia sme teraz.

REFERENCIE

Jech, Thomas J. (1971). *Lectures in Set Theory: With Particular Emphasis on the Method of Forcing*. New York: Springer Verlag.

Niečo o autorkách:

RNDr. Eva Butkovičová, CSc. bola prvou ašpirantkou prof. Bukovského. Venovala sa výskumu v oblasti štruktúry β -obalu prirodzených čísel a deskriptívnej teórii množín. Bola členkou seminára od jeho začiatku v roku 1978 do roku 1992, kedy odišla do Veľkej Británie. Tam pracovala ako programátorka-analytička až do odchodu do dôchodku v júli 2018.

RNDr. Eva Copláková, CSc. študovala na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach v rokoch 1975-80. Po skončení štúdií pracovala na Detašovanom pracovisku MÚ SAV v Košiciach v rokoch 1980 – 86. V akademickom roku 1986/87 sa zúčastnila stáži na Miami University Oxford, Ohio, USA ako hosťujúci vedecký pracovník. Po návrate až do dôchodku, v apríli 2023, pôsobila na univerzite Technical University, Delft, Holandsko.

Adresa autoriek:

e-mail: eva.f.butkovic@gmail.com

e-mail: ecoplakova@gmail.com

2.2 PROFESOR BUKOVSKÝ

Viera Gavalová

Volám sa Viera Gavalová, no pán profesor Bukovský, ako aj väčšina matematikov, ma pozná najmä pod mojím rodným priezviskom Šottová. Na univerzite Pavla Jozefa Šafárika som začala študovať bakalársky odbor Matematika v akademickom roku 2011/2012. Práve počas tohto štúdia som prvýkrát zaznamenala meno pána profesora, a to na predmete Teória množín, kde sme pri štúdiu využívali jeho knihu Množiny a všeličo okolo nich. Spomínam si, že po prečítaní knihy ma tento predmet veľmi zaujal. Avšak v bakalárskej práci som sa nakoniec venovala diferenciálnym rovniciam.

Na magisterskom stupni som si zvolila štúdium manažérskej matematiky, no v rámci diplomovej práce som sa už začala venovať teórii množín, konkrétne ideálom na prirodzených číslach. Týmito ideálmi sú systémy množín uzavreté na podmnožiny a konečné zjednotenia, ktoré obsahujú minimálne všetky konečné podmnožiny prirodzených čísel, a teda aj prázdna množina je jeden z jej prvkov. Moja práca pod názvom Ideály a submiery na prirodzených číslach sa zaoberala ich previazaním s viac známym pojmom submiery. Pri skúmaní danej problematiky sme ale narazili na rozličné definície submiery, no nepodarilo sa nám nájsť explicitný dôkaz, ktorý by potvrdzoval, že definície hovoria o rovnakom pojme. Mojou prvou úlohou teda bolo dokázať ekvivalentné medzi týmito rôznymi charakteristikami submiery, vďaka čomu som sa azda po prvýkrát osobnejšie stretla s teóriou množín. Krátko po sfinalizovaní dôkazu prišla možnosť odprezentovať spomínaný výsledok na košickom topologickom seminári, ktorú mi sprostredkoval môj vedúci práce a profesorov študent RNDr. Jaroslav Šupina PhD.

Moje prvé vystúpenie na seminári sa teda odohralo v akademickom roku 2015/2016, čiže ešte počas magisterského štúdia. Košické semináre sa vyznačujú takou zvláštnosťou. Stáva sa, že jedno stretnutie trvá aj 4 hodiny. Spomínam si,

ako som celý predchádzajúci deň strávila prechádzaním si dôkazu v pamäti, ktorý som mala prezentovať a premýšľaním, ako vyplniť zvyšné hodiny stretnutia. Nakoniec som posledné slová k dôkazu povedala po 3 a pol hodine. Áno, aj mňa to prekvapilo, no na seminári sme pekne dopodrobna prešli každý jeden detail dôkazu, a aj vďaka otázkam profesora a ostatných členov semináru, som sa mohla pri prezentovaní presvedčiť o správnosti nie len samotného dôkazu, ale aj môjho chápania problému. Nikdy nezabudnem, s akou precíznosťou mi kládol pán profesor otázky, či napríklad pochválil spôsob prezentovania. V tom čase to na mňa pôsobilo veľmi povzbudzujúco, či už vo študijnej, ale aj osobnej rovine. Najviac sa mi však vryla do pamäte jeho veta na záver: Ďakujeme, niečo sme sa naučili! Počula som ju potom ešte veľa krát, ale tento moment mal pre mňa veľký význam. Videla som pred sebou človeka, ktorý bol ochotný počúvať niekoľko hodín pre neho určite jednoduché veci, navádzať ma otázkami k mnou lepšiemu pochopeniu problému a ešte nakoniec povedať ďakujem. Bola to asi jeho najúžasnejšia vlastnosť, viesť študentov nie len k zdanlivému popísaniu, ale aj reálnemu porozumeniu problému.

Počas môjho štúdia, kedy som sa venovala hlavne skúmaniu výberových princípov z pohľadu ideálov, nastala ešte jedna krásna udalosť, a to, že pán profesor dovŕšil 80 rokov svojho života. K tomuto jeho jubileu sme sa rozhodli zorganizovať medzinárodnú konferenciu, ktorá oficiálne začínala práve v deň jeho osemdesiatych narodenín. Vzdať poctu práci pána profesora takýmto spôsobom prišlo niekoľko desiatok matematikov z rôznych oblastí, v ktorých profesor pôsobil. Musím podotknúť, že veľkú časť účastníkov tvorili aj mladí vedci, ktorí sa o profesorovi dozvedeli aj vďaka študentom, ktorých profesor vchoval a podporoval v napredovaní, pôsobiacich v Košiciach, ale aj v zahraničí. Celá konferencia prebiehala na veľmi vysokej úrovni a mnoho účastníkov by sa aj na základe tejto skúsenosti znova rado vrátilo pri podobnej udalosti do Košíc. Pre mňa osobne, ako jedného z pomocných organizátorov, to bol tiež podnetný zážitok a určite by sa dalo o ňom

veľa napísať. Avšak spomeniem len dva pre mňa dojemné momenty. Prvým bola gratulácia profesorovi pri príležitosti otvorenia konferencie, kde som mala česť mu odovzdať kyticu. V jeho očiach sa v tom momente zrkadlila obrovskú hrdosť, šťastie a možno aj tak trošku úľava. Pán profesor mal pred začiatkom totižto rešpekt voči konferencii takých rozmerov a možno aj obavy, ktoré sa ale podľa mňa pri pohľade na plnú prednáškovú sálu rozplynuli v nesmiernu radosť. Druhý silný moment nastal až po konferencii, keď sme sa v rámci seminára rozprávali o jej priebehu. Vtedy som u neho spozorovala veľké zadosťučinenie z jeho pôsobenia v Košiciach. Mal možnosť na vlastné oči vidieť výsledky jeho snahy udržiavať kontakty hlavne napríklad s pražskou komunitou, kde počas svojich štúdií pôsobil, ale aj inými výskumnými skupinami, lebo aj vďaka tomu mala konferencia veľmi dobré ohlasy u nás, i v zahraničí. Ja sama som dokonca mala možnosť čerpať z výhod takýchto kontaktov a zúčastniť sa viac ako polročného študijného pobytu v Prahe, a následne aj v iných častiach sveta.

Rok po konferencii už bola za nami prvá vlna covidu. Toto obdobie malo za následok i postupnú premenu seminára na jeho online formu a následne na kombinovanú verziu. A ako sa hovorí, všetko zlé je na niečo dobré, aj v tomto prípade nás to posunulo ďalej. V prvom rade to umožnilo profesorovi zúčastňovať sa seminárov tak povediac až do poslednej chvíle. Spomínam si, ako nám ešte navrhol odprezentovať jeho najnovšie výsledky v prípade, ak by sme potrebovali vyplniť program seminára. Do poslednej chvíle riešil matematické problémy. Myslím, že to bol jeho spôsob držať sa pri zdravom rozume a hlavne cesta ako sa tešiť zo života.

Dnes už teda môžeme na seminári privítať aj zahraničných hostí oveľa jednoduchšie i častejšie, a byť tak viac v kontakte so širšou skupinou matematikov, čo napomáha k napredovaniu v našom vzdelávaní i v zdieľaní nami získaných poznatkov. Aj v mojom prípade som práve vďaka možnosti prezentovať svoje čiastkové výsledky na niekoľkých seminároch počas štúdia mohla rýchlejšie napredovať, ako aj oveľa lepšie

premyslieť riešenia mnou skúmaných problémov. Dokonca by som povedala, že práve uvedomenie si potreby neustáleho vzdelávania sa a zdieľania vedomostí je nepochybne jedným z najdôležitejších odkazov seminára, ku ktorému nás svojim konaním viedol aj samotný pán profesor Bukovský.

Niečo o autorke:

RNDr. Viera Gavalová, PhD. obhájila dizertačnú prácu v roku 2020. V súčasnosti pracuje na Technickej univerzite v Košiciach. Aj napriek tomu, že nebola doktorandkou profesora Bukovského, prostredníctvom seminára bola ním výrazne ovplyvnená. Značne prispela do organizácie konferencie v roku 2019 pri príležitosti profesorovej osemdesiatky.

Adresa autorky:

Katedra aplikovanej matematiky a hospodárskej informatiky, Ekonomická
fakulta TUKE
Němcovej 32, 040 01 Košice
e-mail: viera.gavala@gmail.com

2.3 VERZAMELINGEN EN VAN ALLES EROMHEEN

Klaas Pieter Hart

In August 1984 I arrived by train in Košice to spend a post-doctoral year with Lev Bukovský¹.

It was an interesting year, thanks to Lev and all the people at UPJŠ and the Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, some of whom I have remained in contact with to this day.

And I learned a lot in the seminar; its topics were completely different from those at the Free University. Way more (Descriptive) Set Theory and Infinitary Combinatorics.

In my memory the blackboard that we used was one of the smallest I have ever seen; it taught me to be very economical when writing on it. A skill I lost when I was spoiled by having larger ones to play with in Delft.

Lev Bukovský learned his forcing in Prague, where the Boolean-valued approach was developed by Vopěnka and his students. Thus we would always see truth values of formulas on the board, except when it was my turn; I was used to the forcing relation.

One of my cherished possessions is a copy of the first edition of Bukovský's *Množiny a všeličo okolo nich*, in which Lev wrote *To Klaas Pieter, who pressed me to use the strange sign \Vdash .*

And now the Netherlands can benefit from this book too. Eva Coplakova and I prepared a Dutch translation that appeared in the beginning of 2022. It has the same title: *Verzamelingen en van Alles Eromheen*.

Niečo o autorovi:

I studied mathematics at the Free University in Amsterdam (present name: VU University), where I graduated in 1980 and obtained my PhD in 1984, both under the supervision of Maarten Maurice. After that I spent

¹ And for another reason, that we will not get into here.

a year in Košice, went back to the Free University and spent a year at Miami University in Oxford, OH (USA). From 1987 I have been at the TU Delft, teaching and doing mathematics. My main hobbies are General Topology and Set Theory.

Adresa autora:

Faculty EEMCS, TU Delft

Mekelweg 4, 2628 CD Delft, Netherlands

e-mail: k.p.hart@tudelft.nl, <https://fa.ewi.tudelft.nl/~hart>

2.4 MOJE DOJMY A POSTREHY ZO SEMINÁRA

Adam Marton

Počas môjho prvého roku magisterského štúdia ma požiadal vedúci mojej diplomovej práce, žiak prof. Leva Bukovského, RNDr. Jaroslav Šupina, PhD., o vystúpenie na *Seminári z teórie množín a topológie*. Cieľ bol diskutovať o mojej práci s publikom, ktorému je daná téma blízka, a ktoré môže tento projekt posunúť svojimi postrehmi, pripomienkami a návrhmi vpred. A tak som približne v máji 2019 s obrovským rešpektom na seminári vystúpil. Bol to môj prvý kontakt so seminárom, a keďže sú moje spomienky na túto udalosť stále veľmi živé, dovoľm si ju opísať v prítomnom čase:

V malej svetlej, pre naše skromnejšie počty však dostatočnej miestnosti, sedia za stolmi dvaja akademici: doc. Miroslav Repický a Dr. Peter Eliaš, vedúci mojej diplomovej práce Dr. Jaro Šupina so svojou doktorandkou Dr. Vierkou Šottovou (dnes Gavalovou) a samozrejme, prof. Bukovský. Ja stojím pred tabuľou a snažím sa prezentovať svoje pokroky v diplomovej práci. Necítim sa úplne komfortne, stále ma totiž prenasleduje pocit, že vysvetľujem Einsteinovi základy fyziky, a že márnim drahocenný čas týchto osôb. Tomuto dojmu



Obrázok 15: Online seminár v čase pandémie. Zľava: J. Šupina, M. Repický, M. A. Cardona, V. Gavalová.

nepomôže ani profesorova poznámka, že mu tie veci zatiaľ pripadajú nejak triviálne, a že mu tam chýba nejaký „trik“. Táto taktne vyslovená výčitka však nepôsobí útočne, naopak, ochotne ju prijímam ako podnet k tomu, aby som sa neuspokojil s povrchnými výsledkami. Príčina tejto poznámky je jednoduchá – téma vystúpenia je pre mňa ešte stále pomerne tvrdý oriešok a v skutočnosti som si prednedávnom nevedel ani predstaviť, že budem tým hrozitánskym formulám niekedy úplne rozumieť. Témou výstupu sú ideálové modifikácie rôznych typov konvergenencie postupností reálnych funkcií. Na seminári teda prezentujem sčasti spokojný, pretože som tomu už pomerne dobre rozumel, a sčasti nespokojný, pretože som, pravdupovediac, stále nevyprodukoval nič poriadne. Jedným z dôvodov vystúpenia na seminári je koniec koncov vypočuť si názory a návrhy jeho poslucháčov. V takéto návrhy dúfam a neostávam sklamaný. V momente, keď prezentujem miernu modifikáciu dôkazu pochádzajúceho z článku prof. Bukovského, Dr. Šupinu a prof. Dasa, vyzerá už profesor spokojnejšie. A ja, myslím, takisto. Po skončení vystúpenia strávime ešte nejaký čas počúvaním príhod z profesorovho života. Ani ma veľmi neprekvapuje, aké veľké mená tieto príbehy zahŕňajú. Začínam si však pomaličky uvedomovať, v akej spoločnosti sa nachádzam. Po skončení seminára ma ešte obaja akademici ubezpečujú, že to pre nich vôbec nebola strata času, a že nemusím mať nepríjemné pocity. Túto ich cháparosť som zažil neskôr ešte mnohokrát¹.

Vyššie opísaná udalosť bola napokon prínosná aj v nasledujúcom smere. Vedúci mojej diplomovej práce, Jaro Šupina, mi niekedy vo februári 2019 poslal mail, v ktorom mi písal, že náhodou narazil na ponuku odborných stáží na Matematickom Ústave Slovenskej akadémie vied. Osobná skúsenosť s akademikmi zo seminára mi pomohla nabrať odvalu a kontaktovať MÚ SAV. V lete som už pri káve počúval výklad Dr.

¹ Spomeniem len, že na jednom z posledných seminárov, na ktorých sa profesor Bukovský zúčastnil (hoci len online), som bol rečníkom práve ja. Teda aj v neskoršej časti svojho života bol ochotný venovať svoju pozornosť našim výsledkom.

Peťa Eliaša na tému *Topologické a kombinatorické vlastnosti ideálov na prirodzených číslach*. Veľkou výhodou bolo, že Dr. Eliaš bol ochotný rozoberať so mnou tému blízku zameraniu mojej diplomovej práce. Veľmi mi to pomohlo rozšíriť si obzory v danej problematike. Navyše, report z tejto stáže sa stal jedinou prílohou spomínanej práce.

Takto si teda spomínam na svoje vôbec prvé kontakty s košickým *Seminárom z teórie množín a topológie*. Alebo presnejšie, s členmi tohto seminára (samozrejme, okrem Jara Šupinu a Vierky Gavalovej). Totiž asi sa nedopustím priveľkej nepresnosti, ak stotožním seminár s ľuďmi, ktorí ho navštevujú, a ktorí ho navštevovali, resp. s ľuďmi, ktorí ho tvoria, a ktorí ho tvorili. Preto aj tento text je skôr reflexiou nad konkrétnymi stretnutiami konkrétneho zloženia ľudí, nie nad vágnym pojmom „seminár“.

Spomeniem ešte zopár postrehov alebo obrazov, nad ktorými som už viackrát premýšľal, a ktoré mi utkveli v pamäti. Tým prvým je predstava priebehu seminára. Predpokladám, že väčšina ľudí si predstaví štandardnú prednášku, prípadne kontinuálnu živú diskusiu s pevným koncom. Na našom seminári však bežne nastávala nasledujúca situácia: po tom, čo prednášajúci predstavil nejakú otázku sa po krátkej diskusii každý pohrúžil do svojich myšlienok. Pohľad jedného smeroval do jeho poznámok, pohľad iného zas smeroval kamsi do neznáma. A v celej miestnosti úplné ticho. Úprimne, niekedy ma v takýchto chvíľach prepadala nervozita – veď keď nám nič nenapadá, tak sa posuňme ďalej, čas je predsa vzácny. Nezriedka sa však stalo, že po dlhšej chvíli „vyskočil“ niektorý z účastníkov seminára zo svojho miesta, pristúpil k tabuli a začal na ňu čosi písať. Nemuselo ísť priamo o riešenie, niekedy šlo len o nejaké pozorovanie. Absencia dialógu teda u nás neimplikuje nutne stagnáciu. Naopak, niekedy je známkou toho, že sa pracuje na plné obrátky.

Ďalšie moje pozorovanie, za ktoré patrí všetkým účastníkom moja úprimná vďaka, je veľká ochota počúvať a rozmýšľať o tom, čo vás (matematicky, samozrejme) „trápi“. Možno si niekto povie, že to je samozrejmosť, veď kvôli tomu ten se-

minár predsa existuje. Nuž, áno, to nepopieram. Ak však máte viacero vystúpení po sebe, každé v dĺžke cca 3 hodín, neodvážil by som sa to označiť za samozrejmosť. Tobôž nie, ak nie ste prestížny zahraničný hosť, ale doktorand z domácej fakulty. Aby som dotvoril predstavu o spomínanej ochote, vrátim sa k nejasnému pojmu „pevný koniec“, ktorý som spomenul v predošlom odseku. Na jednom z posledných seminárov (tento text vzniká koncom októbra 2022) som položil účastníkom otázku, týkajúcu sa istého kardinálneho invariantu, na ktorú som v danú chvíľu nevedel odpoveď. Napriek tomu, že padlo zopár návrhov, sme sa do konca môjho vystúpenia k odpovedi nedopracovali. Večer, po príchode domov, som si v mailovej schránke našiel správu od doc. Repického, v ktorom bolo načrtnuté jednoduché riešenie. Nebolo to prvýkrát, čo som sa podobne dopracoval k odpovedi na svoje otázky.

Záverom, seminár zohrával a stále zohráva dôležitú úlohu vo formovaní môjho matematického ja. A nielen toho matematického. Čas strávený v inšpiratívnej atmosfére seminára, spolu s jeho pravidelnými aj nepravidelnými účastníkmi, hosťami zo Slovenska aj zo zahraničia, bol vždy dobre strávený čas.

Témy a dátumy mojich vystúpení na seminári možno nájsť na odkaze: <https://umv.science.upjs.sk/setmath/seminar/>

V zozname sa nenachádza vystúpenie 24.10.2022 na tému *Smallest families ensuring $P(J)$ -property*, moje prvé vystúpenie s diplomovou prácou s názvom *Ideál na prirodzených číslach a konvergencia funkcií* niekedy v máji 2019 a vystúpenie na tému *Localization and anti-localization cardinals in Cichoń's diagram*, na ktorom som prezentoval výsledky iných autorov.

Niečo o autorovi:

RNDr. Adam Marton absolvoval štúdium matematiky na Ústave matematických vied UPJŠ (dnes Ústav matematiky UPJŠ). Seminár začal pravidelne navštevovať po nástupe na doktorandské štúdium v roku 2020.

Všetky svoje doterajšie akademické úspechy dosiahol pod vedením profesorovho žiaka RNDr. Jaroslava Šupinu, PhD.

Adresa autora:

Ústav matematiky, Prírodovedecká fakulta, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika
v Košiciach

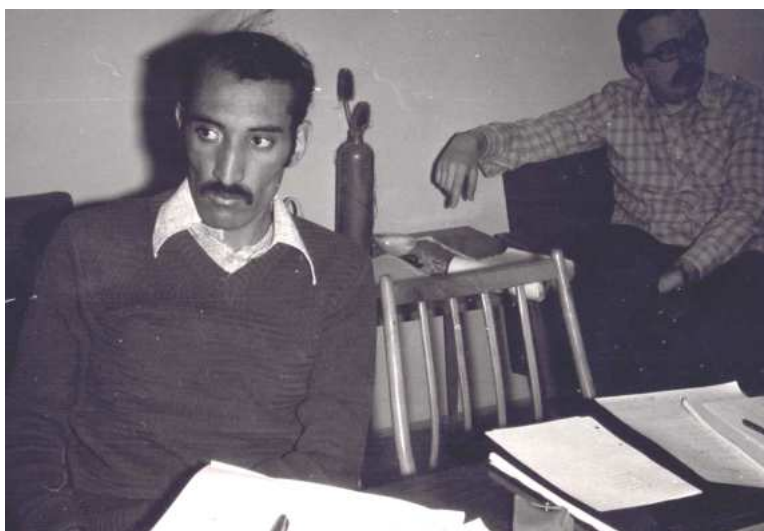
Jesenná 5, 040 01 Košice

e-mail: adam.marton@student.upjs.sk

2.5 MY MEMORIES OF THE SET THEORETIC SEMINAR AT THE P. J. ŠAFARIK UNIVERSITY IN KOŠICE

Sultan Ahmad Niazman

My name is Sultan Ahmad Niazman and I was born on 17.01.1957 in Kandahar Afghanistan. I have followed my primary and secondary school in Kandahar before getting my Baccalaureate Certificate in 1974 from Mirwais Lycee. At that time was still the peaceful sky over Afghanistan emerald blue and full of peaceful stars.



Obrázok 16: Sultan Ahmad Niazman and Peter Vojtáš.

After my entry examination to the universities of Kabul and Nangahar, I was allowed to study at the medicine faculty of Kabul university, at the same time the president of young afghan republic decided to send students abroad to get young Afghan professionals. I then decided on Mathematics as I got the scholarship to Czechoslovakia for the University P. J. Šafarik in Košice.

After one year of language preparation, we, my two fellow Afghan students and I started our studies on the subject

of mathematics in 1976 as the first foreign students at the faculty of natural sciences of P. J. Šafarik university.

My first lectures with Prof. Bukovský were on the mathematical logics. These lectures with its historical background on logics were very interesting. I was not only interested in, for me new, mathematical subjects as mathematical logics, set theory, topology, etc., but also in the broad perspective that Professor Bukovský had for the mathematical discipline with his very interesting and deep knowledge of the historical background of the particular disciplines.

One day I asked him, if I could take part in his set theoretic seminar. He told me: of course, every one is welcome here, but not everyone is able to follow this seminar for a long period. There are many interested students coming and going.

I was very happy to attend the set theoretic seminar. I was always fascinated by the broad spectrum, manifoldness and depth of the seminar. However to follow all of its topics was neither easy nor trivial, but it was helpful to have Prof. Bukovský's broad view on the matter.



Obrázok 17: Conference 5th-Toposym.

I finished my studies in 1981 as RNDr., my diploma thesis was about the set theory and Lebesgue Measure. The highlight of the year 1981 was my participation on the fifth Topo-

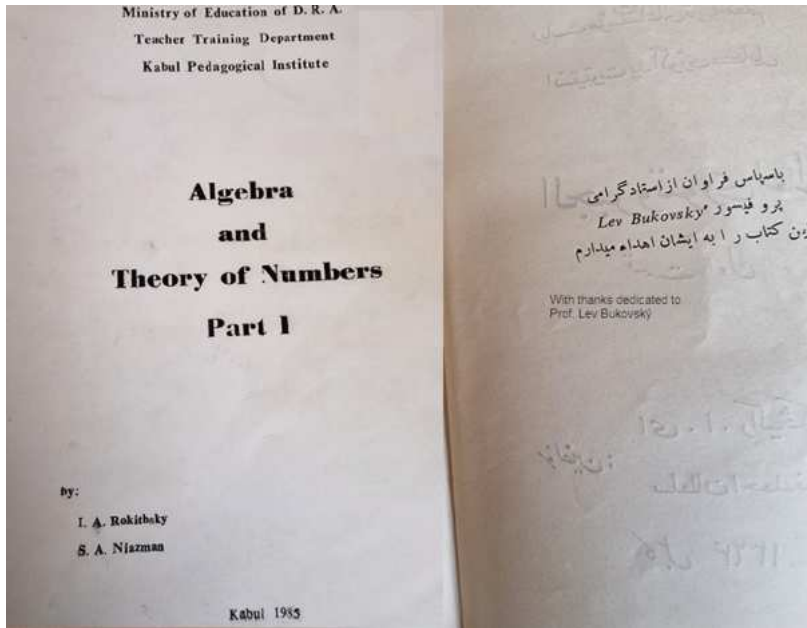
sym in Prague together with the set theory seminar. At this time the sky over Afghanistan was not peaceful anymore and Prof. Bukoský advised me to continue in post gradual study. For this the approval of afghan's government was necessary, which ultimately took one year and resulted in the government not agreeing and me having to leave Czechoslovakia to return to Afghanistans. Due to the very dangerous situation in Afghanistan, our farewell in his holiday cottage, was very emotional, since neither of us knew what was going to happen to me. He was very concerned and told me I can come back anytime.



Obrázok 18: From the left Peter Vojtáš, Martin Gavalec, Sultan Ahmad Niazman, Lev Bukovský.

I was lucky, as at that time the Afghan pedagogical institute in the framework of UN had already been established, where I was finally allowed to work after a three-month long struggle. After one year I was appointed as head of the department of mathematics. We had to build the institute from ground up, and provide the curricula and corresponding lecture notes.

I taught algebra, geometry and some topics of mathematical logics as a special course. My first book on algebra and theory of numbers was dedicated to Prof. Bukovský.



Obrázok 19: Book Algebra and Theory of Numbers.

After five years of intensive work in the pedagogical institute and one and a half years in military service, I was able to leave Kabul for Czechoslovakia in a very spectaculare manner for my postgradual study. I surprised Prof. Bukovský when I called him from Prague, because the official approval of the Slovakian Ministry of Education was not yet there. He was happy and told me I should come to Košice.

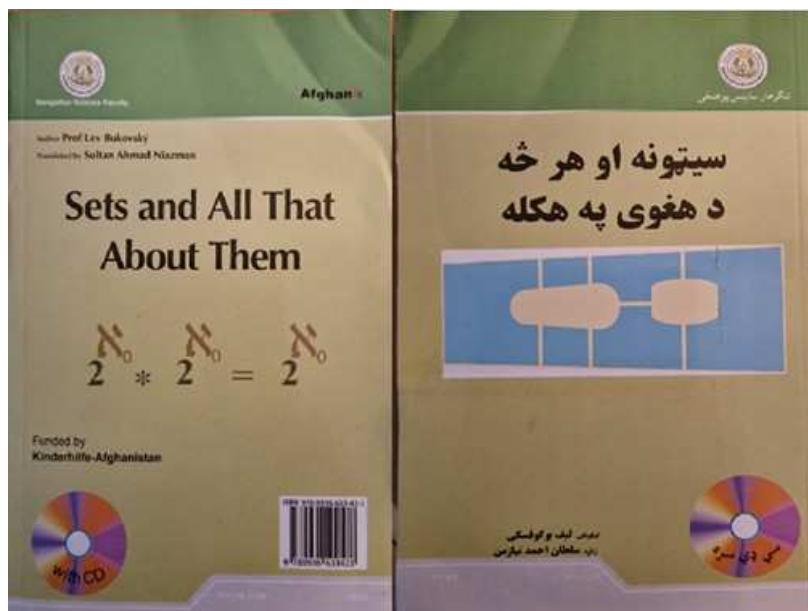
Due to the seven-year gap in my research activity, he advised me to turn our research focus towards the application of mathematical logics in computer sciences. We started with program verification and the question of total or partial correctness of programs. Later, I got to know Prof. Ildiko Sein and Prof. Nemeti from the Hungarian Academy of Sciences at the computer science conference organized by set theoretic seminr in Košice. Their research area of temporal

logic sounded specially interesting to me and I was given the possibility to join them.

My time in Košice was very short, during which I was able to get my Family, my wife and my daughter, out of Kabul. Now they were here in Košice and I stood facing a decision; Continue in my research and risk getting sent back to Kabul or leave the Czechoslovakia. The second alternative seemed more reasonable.

Early 1991 we, my family and I, left Czechslovakia for Germany. This time our farewell was not as the previous one, he smiled and told me that this time I am leaving under better circumstances.

It took eight years to stabilize our life in Germany, in which I was busy with the practical tasks of computer science. Prof. Bukovský and I were regularly corresponding E-Mail. In the August of 2012 he did me the honor of visiting me in Bad Vilbel.



Obrázok 20: Prof. Bukovský's Book „Sets and all that about them“.

One of the Afghan communities under Afghanic e.V. made it task, to supply Afghan universities with textbooks. To

date, the association has published and allowed over 300 titles in various disciplines such as medicine, environment, mathematics, etc ... to Afghans universities free of cost. I have been active in this community since 2013 and revised my two books Algebra and Theory of Numbers and published them in Pashto, third and fourth book were a translation of Alfred Reny's „Dialogue on Mathematics“, and a translation of Prof. Bukovský's Book „Sets and all that about them“ in 2020, which was published one year later, as I wished. I would have loved for it to be done in 2019 already for his birthday Set-Math conference.

Undoubtedly the Set-Math conference on his 80th Birthday was the last scientific highlight with him.

I'm sure that all the activities are motivated by the participation and dynamic of the seminar at that time and I owe it to that.

Niečo o autorovi:

RNDr. Sultan Niazman pôsobil v posledných tridsiatich rokoch v Nemecku ako samostatný poradca v otázkach počítačových sietí ako aj nemeckého daňového softvéru „DATEV“. Do konca roku 2022, približne osemnásť rokov, pôsobil aj ako sieťový a systémový administrátor nemeckej olympijskej a športovej konfederácie (Deutscher Olympischer Sportbund, DOSB). Po dosiahnutí dôchodkového veku, od začiatku roku 2023, sa angažuje v rôznych spoločenských organizáciách.

Adresa autora:

Niazman Consulting, Lupinenweg 40,D-61118, BadVilbel,Germany
e-mail: san@niazman.de

Jozef Ondáš

Štúdium na PF UPJŠ, odbor matematika, som ukončil v roku 1974. Od začiatku štúdia ma veľmi zaujímala logika, teória množín, modelovanie, formálna algebra a tvorba algoritmov, hlavne diskretných. Veľmi k tomu prispel pán profesor Lev Bukovský, a keď som bol v treťom ročníku, pozval ma do svojho seminára, ktorý sa týmito témami hlboko zaoberal. Aj téma „Teória množín bez axiómu výberu“ mojej diplomovej práce bola samozrejme z tejto oblasti. Po ukončení štúdia som ostal do konca roka na fakulte ako asistent a viedol som cvičenia práve z teórie množín a logiky. Spomínam doteraz na semináre vedené prof. Bukovským a na hlboké teoretické diskusie. Vtedy som tomu ešte veľmi nerozumel, ale určite som pozorne vnímal spôsob uvažovania a toto ma, myslím, formovalo aj v budúcnosti.

Z rodinných dôvodov som odišiel pracovať ako matematik-informatik do Východoslovenských železiarní, kde som za úlohu dostal uplatňovanie matematických metód do optimalizácie procesov vo VSŽ. Začal som s využitím lineárneho programovania a neskôr som sa dostal k nádhernému problému „Optimalizácii strihových plánov na dynamo linky“. V podstate je to NP-úplný problém, o ktorom teda nevieme (zatiaľ?) dokázať či naň existuje deterministický polynomiálny algoritmus, pustil som sa do hľadania síce nie optimálneho, ale prijateľného riešenia, použitím heuristických metód. A tu som to, čo som získal na seminároch prof. Bukovského, teda spôsob uvažovania, modelovanie, algoritmizácia, ... našiel a použil pri riešení. Bol to úspešný projekt, ktorý priniesol podniku značné miliónové úspory!

Neskôr som sa prepracoval do líderských a manažérskych pozícií vo VSŽ, IBM Slovensko, SAP Slovensko, ŽSR, IBM Kuvajt až som svoju kariéru ukončil riadením budovania T-Systems Slovakia v Košiciach a popri tom aj Košice IT Valley. Napriek tomu, že to boli všetko manažérske a líderské

pozície, snažil som sa do maximálnej miery využiť formálne modelovanie, algoritmizáciu, logiku a prácu s neurčitostou, teda všetko, čo som získal počas štúdia a na seminároch s Levom Bukovským. O problémoch v práci s neurčitostou som s Levom často diskutoval aj po ukončení môjho štúdia. A som presvedčený, že hlavne v teórii a projektoch Riadenia zmien, mi to mimoriadne pomohlo k úspechu!

Na Leva Bukovského, na jeho morálne hodnoty, ľudskosť, odbornosť, pracovitosť, starostlivosť, spomínam s úctou, s láskou a vďakou, že som mohol byť aspoň krátko v jeho blízkosti.

Niečo o autorovi:

RNDr. Jozef Ondáš, PhD., MBA absolvoval štúdium matematiky na katedre Matematiky PF UPJŠ v rokoch 1969-1974. Seminár začal pravidelne navštevovať v treťom ročníku až do konca roku 1974. Poznatky z neho využíval počas svojho pôsobenia vo všetkých odborných, manažérskych a líderských pozíciách.

Adresa autora:

Žriedlová 10, 04001 Košice
e-mail: jozef.ondas@gmail.com

2.7 PRÍSPEVOK O SEMINÁRI PROF. BUKOVSKÉHO Z TEÓRIE MNOŽÍN A TOPOLOGIE

Miroslav Repický

Seminár z teórie množín zohrával v mojom živote vždy dôležitú úlohu. Asi prvýkrát mal na mňa priamy dopad, keď som bol študentom 4. ročníka a do Košíc prišiel na pozvanie profesora Bukovského profesor Jeff Paris z univerzity v Manchestri. Veľmi som chcel ísť na jeho prednášku, na ktorej hovoril o svojich nedávnych výsledkoch o nerozhodnuteľných vetách v aritmetike v súvislosti s Goodsteinovou postupnosťou a s mýtickými hydrami. Problém bol, že prednáška sa mala uskutočniť v stredu a každú stredu sa konala celodenná vojenská príprava, z ktorej sa nebolo jednoduché ospravedlniť. Našťastie Janovi Plávkovi sa to podarilo vybaviť a tak traja alebo štyria z ročníka sme sa mohli na tejto prednáške zúčastniť. Nasledujúci akademický rok (t.j. od jesene 1982) som už mal možnosť zúčastňovať sa na seminári z teórie množín. Profesor Bukovský mi vybral tému diplomovej práce, študijnú literatúru, Eva Copláková ma krátko uviedla do problematiky a po nejakom čase a po niekoľkých konzultáciách u pána profesora som mohol svoje prvé výsledky prezentovať priamo na seminári. V tomto zimnom semestri profesor Bukovský zorganizoval ešte jeden pravidelný seminár so širším zameraním, v ktorom prevažovali informatici a ktorý súvisel so vznikajúcou katedrou informatiky. Prakticky všetci pravidelní účastníci seminára z teórie množín niekoľko semestrov paralelne navštevovali aj tento seminár. Prvú prezentáciu na ňom mal Peter Slodička o forcingu a niekoľkokrát sa táto téma zopakovala, ale následne na ňom prevažovali informatické témy a postupne sa jeho zameranie zúžilo len na informatiku.

Niekoľko desaťročí mal seminár z teórie množín pevne vyhradený čas vo štvrtok 10.00–12:00 v pracovni profesora. V čase, keď som sa na ňom začal zúčastňovať, pravidelne na ňom boli Eva Butkovičová, Eva Copláková (neskôr Hartová), Peter Vojtáš, Peter Slodička (odišiel v novembri 1882). Roma-

na Friča si na seminári pamätám asi o rok neskôr. Po mojom návrate zo základnej vojenskej služby na jar 1985 na seminári bol tiež Klaas Pieter Hart, ktorého pobyt v Košiciach trval ešte približne jeden rok a potom odišiel aj s manželkou do Holandska. V jeseni 1986 som sa stal zamestnancom MÚ SAV a nastúpil som na externú ašpirantúru na PF UPJŠ pod vedením profesora Bukovského. Vďaka kontaktom profesora Bukovského som absolvoval trojtýždňový pobyt na univerzite vo Wroclawi a týždenný pobyt na MKI – MTA v Budapešti. Medzitým v seminári postupne pribudli Jaro Skřivánek, dvaja diplomanti Petra Vojtáša, Laco Spišiak a Peter Nikodem, Leo Paulik a krátko aj Sultan Niazman. Toto všetko bolo pred rokom 1989 alebo krátko potom.

Pokiaľ ide o mňa, je niekoľko tém, na riešení ktorých som sa mohol spolupodieľať a za ktoré vďačím profesorovi Bukovskému. Raz priniesol do Košíc dva fascikle separátov prof. Ludka Zajíčka o σ -pórovitých množinách. Pomerne rýchlo sa ukázalo, že niektoré otázky týkajúce sa σ -pórovitých množín nejako súvisia s logikou a axiomatikou teórie množín a na tomto základe vzniklo niekoľko mojich prác. V tom čase sa profesor Bukovský už nejaký čas zaoberal kvázinormálnou konvergenciou reálnych funkcií a niekedy okolo roku 1988 prezentoval svoje výsledky na nejakej konferencii v Gdaňsku. Táto problematika zaujala Ireka Reclawa, ktorý prijal pozvanie profesora na krátky pobyt v Košiciach. Na základe tohto pracovného pobytu postupne vznikli v spoluautorstve nás troch dve publikácie. Profesor Bukovský pokračoval v riešení tejto problematiky aj s niektorými svojimi nasledujúcim študentmi (Jozef Haleš, Jaroslav Šupina, Vierka Šottová). Seminár bol aj miestom, kde sa plánovala účasť na konferenciách. Takouto pravidelnou konferenciou bola „Zimná škola z abstraktnej analýzy“, ktorú organizoval Zdeněk Frolík (po jeho smrti Bohuslav Balcar a Peter Simon). Vždy tam bolo pozvaných niekoľko matematikov zo západu, ale aj zo Sovietskeho zväzu. Niekoľkokrát tam bola aj Natal'ya Nikolaevna Kholshchevnikova z Moskvy. Niektoré z jej výsledkov súviseli s kvázinormálnou konvergenciou funkcií. V lete 1993 prijala po-

zvanie profesora Bukovského na mesačný pobyt v Košiciach. Výsledkom bola spoločná práca nás troch o tenkých množinách súvisiacich s konvergenciou trigonometrických radov. Na niektoré z týchto výsledkov nadviazal Peter Eliaš počnúc svojou diplomovou prácou s pokračovaním v niekoľkých svojich publikáciách ako PhD študenta profesora.

V 90-tych rokoch činnosť seminára z teórie množín možno trochu poľavila na intenzite, a to z viacerých dôvodov: profesor Bukovský sa stal rektorom univerzity (dve funkčné obdobia), Peter Vojtáš získal Humboldtovo štipendium v rokoch 1990–91, ja som v roku 1992 absolvoval 10 mesačný pobyt v Izraeli, niektorí účastníci seminára zmenili svoje pôsobisko (napr. Laco Spišiak odišiel z fakulty, Eva Butkovičová sa odsťahovala do Anglicka). Okrem toho Peter Vojtáš (podobne ako Leo Paulik) postupne cez fuzzy logiku inklinoval k informatike, až nakoniec skončil s teóriou množín. Seminár si zachoval svoju kontinuitu vďaka ďalším generáciám študentov profesora (Peťo Eliaš, Stano Krajči, Jožo Haleš, Michal Staš, Jaro Šupina, Vierka Šottová-Gavalová a nakoniec Adam Marton). Počas celej existencie seminára profesor Bukovský svojimi výsledkami a prirodzenou autoritou predurčoval oblasť nášho spoločného výskumu v teórii množín a v topológii. Do posledných chvíľ žil a pracoval v tomto seminári. Neskôr nám jeho manželka (doc. Zuzana Bukovská) potvrdila, čo preňho seminár znamenal. V tom čase sme kvôli pandémie mávali len online stretnutia. Týždeň pred koncom vraj už prakticky na nič nereagoval, ale keď prišiel čas seminára, prebral sa a dokázal absolvovať dvojhodinový seminár pred obrazovkou počítača. Rozprávali sme sa a nikomu ani nenapadlo, že je to naposledy, čo sa vidíme. Treba podotknúť, že odchodom pána profesora činnosť nášho seminára neskončila. Vďaka organizačným schopnostiam Jara Šupinu seminár pokračuje jednak prezenčne a občas aj v online priestore.

Niečo o autorovi:

Doc. RNDr. Miroslav Repický, CSc. je tvárou seminára, je jeho súčasťou od osemdesiatych rokov. Má v oblasti teórie množín uznávané výsledky,

je známy medzi mnohými výskumníkmi v tej oblasti a v deväťdesiatych rokoch absolvoval postdoktorandský výskumný pobyt v Izraeli.

Adresa autora:

Detašované pracovisko Matematického ústavu SAV v Košiciach
Grešákova 6, 040 01 Košice
e-mail: repicky@saske.sk

2.8 SEMINÁR A VŠELIČO OKOLO NEHO

Ladislav Spišiak

Hneď na úvod musím čitateľa aj tvorcov publikácie poprosiť o prepáčenie, že iba čiastočne dokážem dodržať zámer písať o seminári pána profesora Bukovského. Je to preto, že pôsobenie a vplyv pána profesora na mňa, moje štúdium, moju prácu a môj život sú omnoho komplexnejšie a podstatne presahujú rámec samotného seminára.

Pána profesora poznám ako charizmatického, náročného a spravodlivého učiteľa s veľkým nadhľadom a schopnosťou poukázať na podstatné súvislosti, takže vyučovanie množín, topológie, funkcionálnej analýzy aj logiky a teórie algoritmov bolo vždy nesmierne zaujímavé a tvorivé. Tešil som sa aj z príležitosti na neformálnu spoluprácu, keď ako skončeného olympionika si ma pán profesor vybral za pomocníka pri vedení krúžku MO pre stredoškóľakov východoslovenského regiónu. Samozrejme, nemôžem zabudnúť na inšpiratívne a spoločensky mimoriadne dôležité pôsobenie pána profesora pred, počas aj po nežnej revolúcii, keď všetku svoju prirodzenú autoritu využíval aj v zodpovedných funkciách na vytvorenie čo najspravodlivejších a najrozumnejších podmienok a pravidiel.

Na činnosti semináru som sa začal zúčastňovať ešte ako študent asi od roku 1982 a pod vedením pána docenta Vojtáša a pána profesora vznikli moje práce v ŠVOČ, diplomová práca, niekoľko príspevkov na konferenciách a dva publikované články týkajúce sa neekvivalentných definícií konečných množín bez axiómy výberu. V ďalších rokoch som sa stretával so všetkými súčasťami a aspektmi činnosti semináru – štúdium a vzájomné referovanie vybratej literatúry a výsledkov výskumu, návštevy, stáže a vedecká spolupráca s matematikmi zo zahraničia, účasť na zimných školách a iných konferenciách. Nie som povolaný hodnotiť, ale veľmi na mňa zapôsobili náročnosť, prehľad, odbornosť a systematickosť, s ktorými

pán profesor zhromažďoval, triedil a vyberal zdroje a súvisiace práce a usmerňoval program seminára.

Aj keď sa moje pôsobenie na PF UPJŠ v roku 1994 skončilo, stále som vďačný za všetko, čo som získal od pána profesora a môžem využívať – snáď aj v prospech mojich študentov a prípadne kolegov – vo svojej práci aj v osobnom živote. Môj život by bol bez zásadného vplyvu pána profesora omnoho chudobnejší. Vlastne mám veľký rešpekt pred tým, kam až siahla pozitívny a neopakovateľný vplyv pána profesora.

Niečo o autorovi:

RNDr. Ladislav Spišiak je významný stredoškolský učiteľ matematiky. Važiaci si profesora Bukovského, jeho prácu i školu.

Adresa autora:

Gymnázium,
Šrobárova 1, 042 23 Košice
e-mail: spisiak@srobarka.sk

2.9 SEMINÁRNE NOSTALGIE

Michal Staš

Už pri nástupe na Prírodovedeckú fakultu UPJŠ sme boli ako prváci upozornení na viacero prekážok, ktoré budeme musieť počas štúdia úspešne zvládnuť. Z tých „najväčších nástrah“ to boli predovšetkým predmety prof. Leva Bukovského. Nejednen študent z vyšších ročníkov sa nechal počuť, že veľmi rýchlo zistíme kto je „najväčšie zviera na škole“. S týmto rešpektom som začal aj ja absolvovať predmet Teóriu množín, ktorý Pán profesor prednášal. Po úvodných prednáškach sa však môj rešpekt prehĺbil na záujem čo najviac sa dozvedieť o tejto široko obsiahlej oblasti z matematiky. To bol aj jeden z hlavných dôvodov prečo som si vybral práve prof. Bukovského ako školiteľa k bakalárskej práci.

Aby som čo najlepšie prenikol do zákulisia teórie množín a axiomatickej teórie bolo mi odporúčané, aby som popritom navštevoval aj seminár. Začiatky boli naozaj veľmi náročné. Popri štúdiu som si musel nájsť dostatok času, aby som vedel aspoň čiastočne prepájať už dosiaľ známe výsledky so zatiaľ otvorenými problémami. Priebežne som dostával aj rôzne teoretické príklady na precvičovanie, ktoré by sám prof. Bukovský zvládol vypracovať behom pár minút, no ja som nad tým strávil vždy niekoľko dní. Mnohých by to možno demotivovalo, no ja to pokladám odstupom času za najväčší prínos od Pána profesora. Taktiež mi bolo navrhnuté, aby som sa spolupodieľal pri vytváraní knihy *The Structure of the Real Line*. Na tomto veľdielke pracoval Pán profesor dlhé roky a pre mňa to bola veľká pocta byť aspoň malou mierou nápomocný pri kontrole niektorých jeho častí. Všetky tieto skúsenosti, ktoré som pri tom nadobudol, dodnes zúročujem pri písaní vlastných vedeckých článkov.

Aktívnymi členmi semináru v tom čase boli doc. Miroslav Repický, RNDr. Peter Eliaš a RNDr. Jozef Haleš. Neskôr sa pridala aj RNDr. Jaroslav Šupina ako jeho najnovší bakalár. Na seminári sme sa zväčša stretávali raz týždenne a niektoré

sedenia sa zvykli pretiahnuť aj na niekoľko hodín. Keď sa zahĺbite do nejakého otvoreného problému, tak čas ako keby prestal plynúť. Počas menších prestávok potrebných na zamyslenie sa nás Pán profesor častokrát vtiahol v myšlienkach do obdobia keď začínal pôsobiť na univerzite. Mladšia generácia určite ani netuší s čím všetkým sa musel vysokoškolský pedagóg popasovať v úplne inom politickom režime ako máme dnes. Samozrejmosťou bolo aj časté zaspomínania si na rôzne konferencie a zimné školy, ktorých sa aktívne zúčastňoval. Niektoré kuriozity či vtipné situácie zostávajú za pomyselnými bránami, a nie každý má tú možnosť sa k nim dostať.

Na záver by som sa chcel aj takouto formou poďakovať prof. Levovi Bukovskému ako môjmu dlhoročnému školiteľovi za všetku jeho priazeň, za všetky jeho cenné rady a za jeho zanietenosť k matematike. Je príkladom toho, že láska k matematike nemá ďaleko k vzájomnej blízkosti medzi ľuďmi.

Niečo o autorovi:

RNDr. Michal Staš, PhD. je žiakom prof. Bukovského, aktuálne pracujúci na Fakulte elektrotechniky a informatiky Technickej univerzity v Košiciach v oblasti teórii grafov.

Adresa autora:

Katedra matematiky a teoretickej informatiky, FEI TUKE
Němcovej 32, 042 00 Košice
e-mail: michal.stas@tuke.sk

2.10 MATEMATIKA, POSTRACH ALEBO POÉZIA ?

Dávid Uhrík

Prvýkrát som sa zúčastnil seminára v roku 2016 počas môjho štúdia matematiky na UPJŠ. Mojm vedúcim bakalárskej a diplomovej práce bol Jaroslav Šupina, študent profesora Bukovského, a práve on mi odporučil navštevovať seminár aby som si prehľbil znalosti z teórie množín a topológie. V súčasnosti som doktorandom na Karlovej Univerzite a mojim školiteľom je David Choudounský. Môj výskum je v oblasti teórie množín, konkrétne riešim problémy týkajúce sa nekonečných grafov a rozkladových šipiek. Fakt, že som sa rozhodol pokračovať v štúdiu matematiky ako doktorand úzko súvisí s pozitívnym vplyvom, ktorý na mňa seminár mal a v nemal miere k tomu prispela charismatická osobnosť Leva Bukovského.

V živote som navštívil veľa seminárov, ale máloktoý vo mne zanechal pocit ako Košický seminár teórie množín a topológie. Atmosféra bola vždy príjemná a pred začiatkom prednášky nás profesor často zabával zážitkami zo života matematika.

Jedným z nich bola jeho účasť v relácií "Večer pod lampou" s názvom "Matematika, postrach alebo poézia?". Organizácia bola podľa jeho slov veľmi narýchlo a ponuku o účasti dostal až v deň natáčania, do Bratislavy letel lietadlom a reláciu stihol na poslednú chvíľu. Spomínal na príjemný rozhovor moderovaný Štefanom Hríbom spolu s matematikmi: Pavlom Brunovským a Pavlom Zlatošom a fyzikom: Martinom Mojžišom. Ešte v ten deň, keď o tom hovoril na seminári som si večer reláciu sám pozrel. Zrejme som v tejto záležitosti zaujatý, ale každá sekunda tej relácie ma bavila a ani som sa nenazdal a trojhodinový rozhovor skončil. Bolo úsmevné sledovať ako sa profesor snaží Hríbovi vysvetliť nerovnicu $\aleph_0 < \mathfrak{c}$, ktorá hovorí o tom, že množina prirodzených čísel má mohutnosť ostro menšiu ako množina reálnych čísel. Snáď ešte trúfalejšie bolo uviesť koncept nemerateľnej množiny, ktorej existencia plynie z axiomy výberu.

Počas prednášok bol profesor aj napriek vysokému veku veľmi aktívny a ak sme mali nového prednášajúceho tak ich vždy na začiatok upozornil, že seminár je vedený vo voľnom duchu a často sa vstupuje do prednášky otázkami a poznámkami a my ako účastníci nie len pasívne počúvame. Tento aspekt som vnímal veľmi kladne a mal som často pocit, že matematika sa aktívne predou mnou objavuje. Dĺžka seminára bola výnimočná, bežne trval 3 aj viac hodín. Keďže bol seminár taký dlhý a prednášky často technické a detailné tak po 2+ hodinách nebolo vždy ľahké udržať maximálnu pozornosť a niekedy vôbec bdelosť. Tomuto nebol imúnny ani profesor, ale čo ma na ňom vždy fascinovalo bola jeho schopnosť sa okamžite dostať do obrazu a položiť rovno aj relevantnú otázku. Tradícia dlhých seminárov zrejme pochádza ešte z časov, keď bol profesor výskumníkom na Matematickom ústave ČSAV v Prahe. Tam sa zúčastňoval seminára teórie množín, ktorý viedol Petr Vopěnka a podľa slov profesora tam boli atmosféra aj prístup podobné ako na jeho seminári v Košiciach. Pražský seminár teórie množín sa odvtedy vyvíjal ale v určitej forme dodnes pretrváva, v súčasnosti pod názvom¹ "Seminár z počtů" (kde som pravidelným účastníkom), ktorý dlhé roky viedol Bohuslav Balcar, dlhoročný kolega a kamarát profesora Bukovského.

V rokoch 2016 až 2018, keď som bol účastníkom Košického seminára ho okrem profesora pravidelne navštevovali: Peter Eliáš, Miroslav Repický, Viera Šottová a Jaroslav Šupina. Eliáš a Repický sú výskumníci na Matematickom ústave SAV v Košiciach, Šupina pôsobí na UPJŠ a Šottová bola v tom čase študentkou, rovnako ako ja, pod vedením Šupinu. Na seminári sa najčastejšie preberali témy, ako názov seminára napovedá, množinovo-teoretickej topológie. Osobne som na seminári viackrát prezentoval, najmä počas môjho magisterského štúdia, témy týkajúce sa mojej diplomovej práce. Na seminári, a v diplomovej práci všeobecne, som prezentoval

¹ *Seminár z počtů* je pražský seminár teórie množín založený Bohuslavom Balcarom, ktorý spolu s Bukovským navštevoval Vopěnkov seminár, v súčasnosti vedený Davidom Chodounským.

o skladaniach funkcií, ktoré nie sú spojité, ale ich nespojitosť je stále relatívne jednoduchým spôsobom popísateľná. Po návrate z Erasmu, ktorý som absolvoval v Budapešti na ELTE, ma profesor poprosil aby som pripravil prednášku z tém, ktoré som sa naučil na prednáške Pétera Komjátha z teórie množín. Vtedy som hovoril o takzvaných uzavretých, neobmedzených množinách a známych vetách ktoré s tou témou úzko súvisia ako napríklad Fodorova lema.

Ako som spomínal v úvode, seminár mal na mňa veľmi pozitívny vplyv a do značnej miery formoval moju matematickú osobnosť. Mnohé zážitky boli pre mňa inšpirujúce a ostanú mi na ne vždy milé spomienky.

Niečo o autorovi:

Dávid Uhrik bol členom seminára počas svojho štúdia na Univerzite Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach (2016 - 2018). Bakalársku aj diplomovú prácu písal pod vedením Jaroslava Šupinu. V súčasnosti je doktorandským študentom na Karlovej Univerzite v Prahe. Témou jeho práce je nekonečná kombinatorika, konkrétne zovšeobecnenia Ramseyho vety a analýza nespočítateľných grafov. Jeho vedúcim práce je David Chodounský a jeho konzultantom Stevo Todorčević.

Adresa autora:

Matematický ústav Akademie věd České republiky
Žitná 25, 115 67 Praha 1
e-mail: david.uhrik@gmail.com

 NAJDÔLEŽITEJŠIE VYRIEŠENÉ
 MATEMATICKÉ PROBLÉMY

Jaroslav Šupina, Miroslav Repický

Výsledky seminára boli priebežne publikované vo vedeckých časopisoch. Úplný zoznam vedeckých prác profesora Bukovského nájde čitateľ v publikácii (Štefan Tkačik, 2021). V nasledujúcom texte uvádzame výsledky ostatných členov seminára dosiahnuté v seminári. Tieto práce sú rozdelené do niekoľkých skupín podľa svojho hlavného zamerania.

Kombinatorická topológia. $\beta\omega$ je topologický priestor na množine všetkých ultrafiltrov na ω (ω je množina prirodzených čísel). Báza otvorených množín tohto topologického priestoru pozostáva z množín $[a] = \{p \in \beta\omega : a \in p\}$ pre $a \subseteq \omega$. Každá funkcia $f : \omega \rightarrow \omega$ má jediné spojité predĺženie $\bar{f} : \beta\omega \rightarrow \beta\omega$, kde $\bar{f}(p) = \{a \subseteq \omega : f^{-1}[a] \in p\}$. Dva ultrafiltre p a q majú rovnaký typ, ak existuje bijekcia $f : \omega \rightarrow \omega$ taká, že $q = \bar{f}(p)$. V $\beta\omega$ je niekoľko čiastočných usporiadaní, ktoré sú invariantné vzhľadom na typ: $p \leq_{\text{RF}} q$ (Rudin-Frolík), ak existuje diskretná postupnosť ultrafiltrov $\{q_n : n \in \omega\}$ taká, že $q = \sum_{n \in \omega}^p q_n = \{a \subseteq \omega : \{n \in \omega : a \in q_n\} \in p\}$; $p \leq_{\text{RK}} q$ (Rudin-Keisler), ak existuje funkcia $f : \omega \rightarrow \omega$ taká, že $p = \bar{f}(q)$; $p \leq_{\text{RB}} q$ (Rudin-Blass), ak existuje funkcia $f : \omega \rightarrow \omega$ taká, že $p = \bar{f}(q)$ a $f^{-1}[\{n\}]$ je konečná pre každé $n \in \omega$. Nie je ťažké overiť, že $p \leq_{\text{RF}} q \Rightarrow p \leq_{\text{RK}} q$ a $p \leq_{\text{RB}} q \Rightarrow p \leq_{\text{RK}} q$. Uniformný ultrafilter p je P -bod v $\beta\omega$ (t.j. P -ultrafilter), ak prienik každého spočítateľného systému okolí bodu p má neprázdne vnútro (t. j. pre každú postupnosť množín $a_n \in p$, $n \in \omega$ existuje množina $a \in p$ taká, že $a - a_n$ je konečná pre všetky $n \in \omega$). Ul-

trafilter p je Q -bod, ak každý rozklad ω na konečné množiny má selektor, ktorý je v p . Ultrafilter je selektívny, ak je zároveň P -bod a Q -bod. Každý P -ultrafilter je \leq_{RF} -minimálny, každý selektívny ultrafilter je \leq_{RK} -minimálny a každý Q -ultrafilter je \leq_{RB} -minimálny. Existencia ultrafiltrov s týmito vlastnosťami sa v ZFC nedá dokázať ani vyvrátiť.

1. B. Balcar, P. Simon, and P. Vojtáš, *Refinement and properties and extending of filters*. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 28 (1980), no. 11-12, 535–540 (1981).
2. M. Gavalec and P. Vojtáš, *Remarks to a modification of Ramsey-type theorems*. Comment. Math. Univ. Carolin. 21 (1980), no. 4, 727–738.
3. B. Balcar and P. Vojtáš, *Almost disjoint refinement of families of subsets of N* . Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1980), no. 3, 465–470.
4. B. Balcar, P. Simon, and P. Vojtáš, *Refinement properties and extensions of filters in Boolean algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981), no. 1, 265–283.
5. L. Bukovský and E. Butkovičová, *Ultrafilter with \aleph_0 predecessors in Rudin-Frolík order*. Comment. Math. Univ. Carolin. 22 (1981), no. 3, 429–447.
6. L. Bukovský and E. Copláková, *Rapid ultrafilter need not be Q -point*. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 1982, Suppl. No. 2, 15–20.
7. E. Butkovičová, *Ultrafilters without immediate predecessors in Rudin-Frolík order*. Comment. Math. Univ. Carolin. 23 (1982), no. 4, 757–766.
8. P. Vojtáš, *Simultaneous strategies and Boolean games of uncountable length*. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 1982, Suppl. No. 2, 293–297.
9. P. Vojtáš, *Game properties of Boolean algebras*. Comment. Math. Univ. Carolin. 24 (1983), no. 2, 349–369.
10. P. Vojtáš, *A transfinite Boolean game and a generalization of Kripke's embedding theorem*. General topology and its relations to modern analysis and algebra, V (Prague, 1981), 657–662, Sigma Ser. Pure Math., 3, Heldermann, Berlin, 1983.
11. E. Butkovičová, *Long chains in Rudin-Frolík order*. Comment. Math. Univ. Carolin. 24 (1983), no. 3, 563–570.
12. E. Butkovičová, *Gaps in Rudin-Frolík order*. General topology and its relations to modern analysis and algebra, V (Prague, 1981), 56–58, Sigma Ser. Pure Math., 3, Heldermann, Berlin, 1983.

13. P. Vojtáš, *Boolean games-classifying strategies and omitting cardinality assumptions*. Proceedings of the 11th winter school on abstract analysis (Železná Ruda, 1983). Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 1984, Suppl. No. 3, 361–368.
14. E. Butkovičová, *Subsets of βN without an infimum in Rudin-Frolík order*. Proceedings of the 11th winter school on abstract analysis (Železná Ruda, 1983). Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 1984, Suppl. No. 3, 75–80.
15. E. Butkovičová, *Short branches in the Rudin-Frolík order*. Comment. Math. Univ. Carolin. 26 (1985), no. 3, 631–635.
16. E. Copláková and P. Vojtáš, *A new sufficient condition for the existence of Q -points in $\beta\omega - \omega$* . Topology, theory and applications (Eger, 1983), 199–208, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 41, North-Holland, Amsterdam, 1985.
17. P. Vojtáš, *Cardinalities of noncentered system of subsets of ω which reflect some qualities of ultrafilters, p -points and rapid filters*. Baku International Topological Conference (Russian) (Baku, 1987), 263–268, "Èlm", Baku, 1989.
18. E. Butkovičová, *Decreasing chains without lower bounds in the Rudin-Frolík order*. Proc. Amer. Math. Soc. 109 (1990), no. 1, 251–259.
19. E. Butkovičová, *A remark on incomparable ultrafilters in the Rudin-Keisler order*. Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), no. 2, 577–578.
20. W. Just and P. Vojtáš, *On matrix rapid filters*. European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (Haifa, 1995). Fund. Math. 154 (1997), no. 2, 177–182.
21. S. Krajčí and P. Vojtáš, *On the Boolean structure generated by Q -points of ω* . 23rd Winter School on Abstract Analysis (Lhota nad Rohanovem, 1995; Poděbrady, 1995). Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 36 (1995), no. 2, 33–38.
22. S. Fuchino, H. Mildenberger, S. Shelah, and P. Vojtáš, *On absolutely divergent series*. Fund. Math. 160 (1999), no. 3, 255–268.

Axiómy teórie množín, modely teórie množín, a forcing.

Axióma výberu (AC): Pre každú množinu X existuje funkcia f taká, že $f(x) \in x$ pre každú neprázdnu množinu $x \in X$. ZFC označuje axiomatický systém Zermela a Fraenkla s AC a ZF označuje rovnaký systém bez AC. Pod modelom teórie množín rozumieme tranzitívnu triedu obsahujúcu všetky ordinálne čísla, ktorá spĺňa axiómy ZF prípadne ZFC. Ak $M \subseteq$

N sú dva takéto modely, hovoríme o rozšírení modelov. Univerzum všetkých množín V a trieda konštruktívnych množín L sú príkladmi takýchto modelov (vnútorné modely). Booleovské modely a forcing umožňujú uvažovať o rozšíreniach, ktoré nie sú vnútornými modelmi.

1. M. Repický, *Properties of measure and category in generalized Cohen's and Silver's forcing*. Acta Universitatis Carolinae, Mathematica et Physica 28 (1987), no. 2, 101–115.
2. M. Repický, *Collapsing of cardinals in generalized Cohen's forcing*. Acta Universitatis Carolinae, Mathematica et Physica 29 (1988), no. 2, 67–74.
3. L. Spišiak and P. Vojtáš, *Dependences between definitions of finiteness*. Czechoslovak Math. J. 38(113) (1988), no. 3, 389–397.
4. L. Bukovský and E. Copláková-Hartová. *Minimal collapsing extensions of models of ZFC*. Ann. Pure Appl. Logic 46 (1990), no. 3, 265–298.
5. M. Repický, *Properties of forcing preserved by finite support iterations*. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 32 (1991), no. 1, 95–103.
6. L. Spišiak, *Dependences between definitions of finiteness*. II. Czechoslovak Math. J. 43(118) (1993), no. 3, 391–407.
7. L. Bukovský and J. Skřivánek, *The smallest common extension of a sequence of models of ZFC*. Comment. Math. Univ. Carolin. 35 (1994), no. 4, 745–752.
8. M. Repický, *Goldstern-Judah-Shelah preservation theorem for countable support iterations*. Fundamenta Mathematicae 144 (1994), no. 1, 55–72.
9. H. Judah and M. Repický, *No random reals in countable support iterations*. Israel Journal of Mathematics 92 (1995), 349–359.
10. M. Repický, *Good sequences for Sacks forcing*. Tatra Mountains Mathematical Publications, 30 (2005), 101–122.
11. M. Repický, *A proof of the independence of the Axiom of Choice from the Boolean Prime Ideal Theorem*. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 56 (2015), issue 4, pp. 543–546.

Konvergencia, pojmy spojitosti. Topologický priestor X sa nazýva sekvenciálny priestor, ak každá množina $A \subseteq X$ je uzavretá práve vtedy, keď A obsahuje limity všetkých konvergentných postupností prvkov z A . Priestor X sa nazýva Fréchetov priestor, ak pre každé $x \in \overline{A}$ existuje postupnosť $x_0, x_1,$

... prvkov A konvergujúca k x . Funkcia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je kvázispojité v bode x , ak pre každé okolie U bodu x a pre každé $\varepsilon > 0$ existuje otvorená množina $G \subseteq U$ taká, že $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pre každé $y \in G$. Funkcia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je symetricky spojitá v bode x , ak $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x-h)) = 0$.

1. R. Frič and M. Gavalec, *On the Novák completion of convergence groups*. Comment. Math. Univ. Carolin. 24 (1983), no. 2, 341–347.
2. R. Frič and P. Vojtáš, *The space ${}^{\omega}\omega$ in sequential convergence*. Convergence structures 1984 (Bechyně, 1984), 95–106, Math. Res., 24, Akademie-Verlag, Berlin, 1985.
3. R. Frič and P. Vojtáš, *Diagonal conditions in sequential convergence*. Convergence structures 1984 (Bechyně, 1984), 77–94, Math. Res., 24, Akademie-Verlag, Berlin, 1985.
4. R. Frič and P. Vojtáš, *Convergent sequences in βX* . Proceedings of the 11th winter school on abstract analysis (Železná Ruda, 1983). Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 1984, Suppl. No. 3, 133–137.
5. J. Borsík, J. Doboš, and M. Repický, *Sums of quasicontinuous functions with closed graphs*. Real Analysis Exchange 25 (1999/2000), no. 2, 679–690.
6. M. Repický, *Generalized Egoroff's theorem*. Tatra Mountains Mathematical Publications, 44 (2009), 81–96.
7. M. Repický, *Sets of points of symmetric continuity*. Archive for Mathematical Logic 54 (2015), issue 7, 803–824.
8. M. Repický, *Ideal generalizations of Egoroff's theorem*. Archive for Mathematical Logic 59 (2020), 957–977.
9. P. Eliaš, *On the convergence of a series mapped by a function*. Math. Slovaca 65 (2015), no. 1, 63–78.

Sumačné metódy radov. Testy konvergenie a divergenie radov, štruktúry založené na porovnaní testov konvergenie a na porovnaní testov divergenie radov, a súvisiace kardinálne invarianty.

1. P. Vojtáš, *Set-theoretic characteristics of summability of sequences and convergence of series*. Comment. Math. Univ. Carolin. 28 (1987), no. 1, 173–183.
2. P. Vojtáš, *The strength of the comparison test versus gaps between convergent and divergent series*. General topology and its relations to modern analysis and algebra, VI (Prague, 1986), 617–622, Res. Exp. Math., 16, Heldermann, Berlin, 1988.

3. P. Vojtáš, *More on set-theoretic characteristics of summability of sequences by regular (Toeplitz) matrices*. Comment. Math. Univ. Carolin. 29 (1988), no. 1, 97–102.
4. P. Vojtáš, *A note on the effectiveness of tests for the absolute convergence and divergence of infinite series*. Math. Slovaca 42 (1992), no. 1, 97–101.
5. P. Vojtáš, *Boolean isomorphism between partial orderings of convergent and divergent series and infinite subsets of N* . Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993), no. 1, 235–242.
6. P. Vojtáš, *On ω^* and absolutely divergent series*. Topology Proc. 19 (1994), 335–348.
7. P. Vojtáš, *Series and Toeplitz matrices (a global implicit approach)*. Real functions (Liptovský Ján, 1996). Tatra Mt. Math. Publ. 14 (1998), 269–281.

Deskriptívna teória množín. Systém borelovských množín v poľskom priestore je najmenší systém množín, ktorý obsahuje všetky otvorené množiny, s každou množinou obsahuje aj jej komplement a je uzavretý na spočítateľné zjednotenia množín. Postupnými aplikáciami (spojitých) projekcií a operácie komplementu na systém borelovských množín vzniknú systémy projektívnych množín Σ_n^1 a Π_n^1 ($n \geq 1$). Projektívne množiny v určitých axiomatických systémoch teórie množín môžu mať niektoré pekné vlastnosti borelovských množín, ale bez špeciálnych axiomatických predpokladov to platí len pre množiny najnižších tried projektívnej zložitosti. Napríklad, každá Σ_1^1 množina má Baireovú vlastnosť, je merateľná vzhľadom na každú σ -konečnú borelovskú mieru a ak je nespočítateľná, tak má perfektnú podmnožinu.

1. L. Bukovský and E. Butkovičová, *A universal function for continuous functions*. Proceedings of the 11th winter school on abstract analysis (Železná Ruda, 1983). Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 1984, Suppl. No. 3, 71–74.
2. M. Staš, *Hurewicz scheme*. Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 49 (2008), no. 2, 75–78.
3. M. Staš, *Application of Hurewicz theorem to classification of Π_1^1 -complete sets*. Tatra Mt. Math. Publ. 46 (2010), 65–69.
4. M. Staš, *The regularity properties on the real line*. Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 51 (2010), suppl., 73–82.

5. M. Repický, *Another proof of Hurewicz theorem*. Tatra Mountains Mathematical Publications 49 (2011), 1–7.
6. P. Eliaš, *A Galois connection related to restrictions of continuous real functions*. Topology Appl. 265 (2019), 106814, 14 pp.
7. J. Šupina and D. Uhrík, *On a Lindenbaum composition theorem*. Tatra Mt. Math. Publ. 74 (2019), 145–158.

Ideály na reálnych číslach a kategoriálne bázy. Medzi Lebesgueovou merateľnosťou a Baireovou vlastnosťou sú určité podobnosti. Známe sú dva spôsoby ako tieto dva pojmy regulárnosti množín vyjadriť nejakým spoločným prístupom. Autorom jedného z nich je D. H. Fremlin. Druhým omnoho jednoduchším prístupom ale aj všeobecnejším sú kategoriálne bázy podľa J. C. Morgana, II. Kategoriálna báza na množine X je systém oblastí $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ s určitými pomerne jednoduchými vlastnosťami, ktoré kontrolujú možnosti vytvárania disjunktných podsystémov systému \mathcal{C} malých mohutností. Množina $A \subseteq X$ sa nazýva \mathcal{C} -riedka, ak každá oblasť $C \in \mathcal{C}$ má podoblasť $D \subseteq C$ takú, že $D \cap A = \emptyset$. Množina A je \mathcal{C} -meager, ak je spočítateľným zjednotením \mathcal{C} -riedkych množín. Množina A má \mathcal{C} -Baireovu vlastnosť, ak každá oblasť $C \in \mathcal{C}$ má podoblasť $D \subseteq C$ takú, že buď $D \cap A$ je \mathcal{C} -meager alebo $D \setminus A$ je \mathcal{C} -meager. Mnoho σ -ideálov je možné popísať ako systém \mathcal{C} -meager množín a niektoré dokonca ako systém \mathcal{C} -rare množín. Dôležitou vlastnosťou kategoriálnych báz je, že systém množín s \mathcal{C} -Baireovou vlastnosťou je uzavretý na Suslinovu operáciu \mathcal{A} . Preto ak všetky otvorené množiny majú \mathcal{C} -Baireovu vlastnosť, tak aj všetky analytické množiny ju majú.

1. M. Goldstern, M. Repický, S. Shelah, and O. Spinas, *On tree ideals*, Proceedings of the American Mathematical Society 123 (1995), no. 5, 1573–1581.
2. G. Labdzki and M. Repický, *Hechler reals*. The Journal of Symbolic Logic 60 (1995), no. 2, 444–458.
3. H. Judah and M. Repický, *Amoeba reals*. The Journal of Symbolic Logic 60 (1995), no. 4, 1168–1185.
4. M. Repický, *Cohen real and disjoint refinement of perfect sets*. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 41 (2000), no. 1, 179–181.
5. M. Repický, *Mycielski ideal and the perfect set theorem*. Proceedings of the American Mathematical Society 132 (2004) no. 7, 2141–2150.

6. M. Repický, *Bases of measurability in Boolean algebras*. *Mathematica Slovaca*, 64 (2014), no. 6, 1299–1334.
7. M. Dečo and M. Repický, *Strongly dominating sets of reals*. *Archive for Mathematical Logic* 52 (2013), issue 7, 827–846.
8. M. Dečo, *Strongly unbounded and strongly dominating sets of reals generalized*. *Arch. Math. Logic* 54 (2015), no. 7-8, 825–838.
9. M. Repický, *Cofinality of the Laver ideal*. *Archive for Mathematical Logic* 55 (2016), issue 7-8, 1025–1036.

Kardinálne invarianty. Pod binárnou reláciou rozumieme trojicu (R_-, R_+, R) takú, že $R \subseteq R_- \times R_+$; alebo jednoducho R , ak R_- a R_+ sú z kontextu zrejmé. Pre reláciu R definujeme tieto dva invarianty:

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}(R) &= \min\{|D| : D \subseteq R_+ \text{ a } (\forall x \in R_-)(\exists y \in D) x R y\}, \\ \mathfrak{b}(R) &= \min\{|B| : B \subseteq R_- \text{ a } (\forall y \in R_+)(\exists x \in B) \neg(x R y)\}. \end{aligned}$$

Píšeme $R \leq S$ ak existuje morfizmus z relácie R k relácii S , čo predstavuje dvojicu zobrazení $\Phi : S_- \rightarrow R_-$ a $\Psi : R_+ \rightarrow S_+$ takú, že $\Phi(x) R y \Rightarrow x S \Psi(y)$. Dôsledkom existencie morfizmu (Φ, Ψ) sú tieto nerovnosti medzi kardinálnymi invariantami $\mathfrak{b}(R) \leq \mathfrak{b}(S)$ a $\mathfrak{d}(S) \leq \mathfrak{d}(R)$. Niekedy nerovnosti medzi kardinálnymi invariantami rôznych štruktúr je možné vyjadriť morfizmami tohto typu. Patria k nim napríklad nerovnosti tzv. Cichoňovho diagramu pre kardinálne invarianty Lebesgueovej miery a Baireovej kategórie.

1. M. Repický, *Porous sets and additivity of Lebesgue measure*. *Real Analysis Exchange* 15 (1989/90), no. 1, 282–298.
2. M. Repický, *Additivity of porous sets*. *Real Analysis Exchange* 16 (1990/91), no. 1, 340–343.
3. M. Repický, *An example which discerns porosity and symmetric porosity*. *Real Analysis Exchange* 17 (1991/92), no. 1, 416–420.
4. P. Vojtáš, *Cardinalities of noncentered systems of subsets of ω* . *Topological, algebraical and combinatorial structures. Frolík's memorial volume. Discrete Math.* 108 (1992), no. 1-3, 125–129.
5. P. Vojtáš, *Topological cardinal invariants and the Galois-Tukey category*. *Recent developments of general topology and its applications* (Berlin, 1992), 309–314, *Math. Res.*, 67, Akademie-Verlag, Berlin, 1992.

6. P. Vojtáš, *Generalized Galois-Tukey-connections between explicit relations on classical objects of real analysis*. Set theory of the reals (Ramat Gan, 1991), 619–643, Israel Math. Conf. Proc., 6, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1993.
7. M. Repický, *Cardinal invariants related to porous sets*. Set theory of the reals (Ramat Gan, 1991), 433–438, Israel Mathematical Conference Proceedings 6, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1993.
8. P. Vojtáš, *Amoeba relation and Galois-Tukey connections*. Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 35 (1994), no. 2, 67–74.
9. M. Repický, *Perfect sets and collapsing continuum*. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 44 (2003), no. 2, 315–327.
10. M. Repický, *Cardinal invariants and the collapse of the continuum by Sacks forcing*. The Journal of Symbolic Logic 73 (2008), no. 2, 711–727.
11. M. Repický, *Rosenthal families, filters, and semifilters*. Archive for Mathematical Logic 61 (2022), 131–153.
12. J. Šupina, *Pseudointersection numbers, ideal slaloms, topological spaces, and cardinal inequalities*. Arch. Math. Logic 62 (2023), 87–112.

Trigonometrické tenké množiny. Symbolom $S(x)$ označme trigonometrický rad $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx)$ a $b_0 = 0$. Nech $A \subseteq [0, 1]$. Množina A je U -množina (set of uniqueness), ak každý trigonometrický rad $S(x)$ konvergujúci k 0 mimo množiny A je identicky rovný nule. A je \mathcal{R} -množina, ak existuje rad $S(x)$ konvergujúci na A taký, že číselná postupnosť $\{|a_n| + |b_n|\}_{n=0}^{\infty}$ nekonverguje k 0. A je N -množina, ak existuje rad $S(x)$ absolútne konvergentný na A a $\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) = \infty$. A je N_0 -množina, ak existuje rastúca postupnosť prirodzených čísel $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ taká, že rad $\sum_{k=0}^{\infty} \sin \pi n_k x$ absolútne konverguje na A . A je A -množina, ak existuje rastúca postupnosť prirodzených čísel $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ taká, že $\lim_{k \rightarrow \infty} \sin \pi n_k x = 0$ pre každé $x \in A$. Ak v definícii A -množiny vymeníme bodovú konvergenciu za rovnomernú alebo kvázinormálnu, dostaneme definíciu Dirichletovej a pseudo-Dirichletovej množiny. Písmenami \mathcal{U} , \mathcal{R} , \mathcal{N} , \mathcal{N}_0 , \mathcal{A} , \mathcal{D} , $p\mathcal{D}$ označujeme systémy množín príslušného typu. Každý z týchto systémov \mathcal{F} je uzavretý na podmnožiny ale nie je ideálom. Preto sa skúmajú ideály prípustných (permitted) množín $\text{Prm}(\mathcal{F}) = \{A \subseteq [0, 1] : (\forall B \in \mathcal{F}) A \cup B \in \mathcal{F}\}$.

1. L. Bukovský, N. N. Kholshchevnikova, and M. Repický, *Thin sets of harmonic analysis and infinite combinatorics*. Real Analysis Exchange 20 (1994/95), no. 2, 454–509.
2. M. Repický, *A family of permitted trigonometric thin sets*. Proceedings of the American Mathematical Society 125 (1997), no. 1, 137–144.
3. M. Repický, *Towers and permitted trigonometric thin sets*. Real Analysis Exchange 21 (1995/96), no. 2, 648–655.
4. M. Repický, *Permitted trigonometric thin sets and infinite combinatorics*. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 42 (2001), no. 4, 609–627.
5. P. Eliaš, *A classification of trigonometrical thin sets and their interrelations*. Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), no. 4, 1111–1121.
6. P. Eliaš, *A hierarchy of thin sets related to the boundedness of trigonometric series*. Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), no. 11, 3341–3347.
7. P. Eliaš, *Covering for category and trigonometric thin sets*. Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 10, 3241–3249.
8. P. Eliaš, *On inclusions between Arbault sets*. Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 44 (2003), no. 2, 65–72.
9. P. Eliaš, *Arbault permitted sets are perfectly meager*. Tatra Mt. Math. Publ. 30 (2005), 135–148.
10. P. Eliaš, *Dirichlet sets, Erdos-Kunen-Mauldin theorem, and analytic subgroups of the reals*. Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), no. 6, 2093–2104.

Fuzzy logika. Viachodnotová logika, systémy odvodzovacích pravidiel, korektnosť a úplnosť týchto systémov odvodzovania, fuzzy logické programovanie.

1. L. Paulík, *Strictness of \mathcal{L}_0 -ring completions*. Ordered algebraic structures '93 (Liptovský Ján, 1993). Tatra Mt. Math. Publ. 5 (1995), 169–175.
2. P. Vojtáš, *A lattice of binary relations with polarity*. Ordered algebraic structures '93 (Liptovský Ján, 1993). Tatra Mt. Math. Publ. 5 (1995), 143–150.
3. P. Vojtáš, *Boolean universe versus fuzzy sets*. Fuzzy sets '94 (Liptovský Ján, 1994). Tatra Mt. Math. Publ. 6 (1995), 179–186.
4. P. Vojtáš and L. Paulík, *Soundness and completeness of non-classical extended SLD-resolution*. Extensions of logic programming (Leipzig, 1996), 289–301, Lecture Notes in Comput. Sci., 1050, Lecture Notes in Artificial Intelligence, Springer, Berlin, 1996.

5. L. Paulík, *Best possible answer is computable for fuzzy SLD-resolution*. Gödel '96 (Brno, 1996), 257–266, Lecture Notes Logic, 6, Springer, Berlin, 1996.
6. L. Paulík, *Left continuity of t-norms and completeness of fuzzy SLD-resolution*. Fuzzy sets (Liptovský Ján, 1996). Tatra Mt. Math. Publ. 12 (1997), 51–63.
7. P. Vojtáš, *Translating Boolean sets to fuzzy sets (reals and their topology)*. Fuzzy sets, Part I (Liptovský Ján, 1998). Tatra Mt. Math. Publ. 16 (1999), part I, 197–209.
8. P. Vojtáš, *Declarative and procedural semantics of fuzzy similarity based unification*. Kybernetika (Prague) 36 (2000), no. 6, 707–720.

Topologické priestory nerozlišujúce konvergencie a výberové princípy. Postupnosť funkcií $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \omega$ kvázinormálne konverguje k funkcii f , ak existuje postupnosť kladných čísel $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergujúca k 0 taká, že $(\forall x \in X) (\forall n \in \omega) |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon_n$. Topologický priestor X je QN-priestor, ak každá postupnosť funkcií $f_n \in C(X)$, $n \in \omega$ konvergujúca bodovo k 0 na X konverguje k 0 kvázinormálne; X je wQN-priestor, ak každá postupnosť funkcií $f_n \in C(X)$, $n \in \omega$ konvergujúca bodovo k 0 má podpostupnosť, ktorá konverguje kvázinormálne k 0. Tieto vlastnosti určitým spôsobom súvisia s Hurewiczovou vlastnosťou, ktorá je súčasťou klasifikácie topologických priestorov v závislosti od existencie pokrytí získaných rôznymi výberovými princípmi z ľubovoľnej postupnosti špecifických otvorených pokrytí. Je tu aj súvis s klasifikáciou priestorov založenej na možnosti výberu konvergentnej postupnosti funkcií určitým výberovým princípom z postupnosti pozostávajúcej z konvergentných postupností spojitých funkcií. Všetky tieto vlastnosti sa skúmajú aj v súvislosti s konvergeniami polospojitéch funkcií aj s ideálovými zovšeobecneniami konvergencií spojitých funkcií.

1. L. Bukovský, I. Reclaw, and M. Repický, *Spaces not distinguishing pointwise and quasinormal convergence of real functions*. Topology and its Applications 41 (1991), no. 1-2, 25–40.
2. L. Bukovský, I. Reclaw, and M. Repický, *Spaces not distinguishing convergences of real-valued functions*. Topology and its Applications 112 (2001), no. 1, 13–40.
3. M. Repický, *Spaces not distinguishing convergences*. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 41 (2000), no. 4, 829–842.

4. L. Bukovský and J. Haleš, *On Hurewicz properties*. *Topology Appl.* 132 (2003), no. 1, 71–79.
5. J. Haleš, *On Scheepers' conjecture*. *Acta Univ. Carolin. Math. Phys.* 46 (2005), no. 2, 27–31.
6. L. Bukovský and J. Haleš, *QN-spaces, wQN-spaces and covering properties*. *Topology Appl.* 154 (2007), no. 4, 848–858.
7. J. Šupina, *wQN spaces and related notions*. *Tatra Mt. Math. Publ.* 46 (2010), 71–77.
8. L. Bukovský and J. Šupina, *Sequence selection principles for quasi-normal convergence*. *Topology Appl.* 159 (2012), 283–289.
9. J. Šupina, *On sequence selection properties*. *Filomat* 27 (2013), 1523–1544.
10. L. Bukovský and J. Šupina, *Modifications of sequence selection principles*. *Topology Appl.* 160 (2013), 2356–2370.
11. J. Šupina, *Notes on modifications of a wQN-space*. *Tatra Mt. Math. Publ.* 58 (2014), 129–136.
12. J. Šupina, *On Ohta-Sakai's properties of a topological space*. *Topology Appl.* 190 (2015), 119–134.
13. J. Šupina, *Ideal QN-spaces*. *J. Math. Anal. Appl.* 435 (2016), 477–491.
14. L. Bukovský, P. Das, and J. Šupina, *Ideal quasi-normal convergence and related notions*. *Colloq. Math.* 146 (2017), 265–281.
15. V. Šottová, *Cardinal invariant $\lambda(S, J)$* . *Geyser Mathematicae Cassoviensis* 1 (2019), 64–72.
16. V. Šottová and J. Šupina, *Principle $S_1(P; R)$: ideals and functions*. *Topology Appl.* 258 (2019), 282–304.
17. P. Das, S. Sengupta, and J. Šupina, *I^K -convergence of sequences of functions*. *Math. Slovaca* 69 (2019), 1137–1148.
18. M. Repický, *Spaces not distinguishing ideal convergences of real-valued functions*. *Real Analysis Exchange* 46 (2021), no. 2, 367–394.
19. M. Repický, *Spaces not distinguishing ideal convergences of real-valued functions, II*. *Real Analysis Exchange* 46 (2021), no. 2, 395–422.

REFERENCIE

Štefan Tkačik, Tomáš Lengyelfalusy (2021). *Lev Bukovský. Osobnosti slovenskej matematiky. 3. diel. Ružomberok: Verbum, 62 s. ISBN: 978-80-561-0844-4.*

BUDÚCNOSŤ SEMINÁRA

Jaroslav Šupina

Každý z nás by rád vedel predpovedať budúcnosť. Očakáva sa to denne od meteorológov, ekonomických a finančných analytikov, politických komentátorov a pod. O ich úspešnosti máme vytvorenú svoju osobnú mienku. Ja sa do predpovede budúcnosti nepúšťam. Pokúsim sa však opísať tri faktory, ktoré považujem za dôležité pri rozvoji seminára. Je to v prvom rade aktuálnosť výskumu vo vedeckých oblastiach seminára, nasleduje kontakt seminára so zaujímavými problémami a nakoniec, samotný ľudský potenciál.

Začnem tým posledným. Podľa mojich dostupných údajov (súčasťou seminára som približne od roku 2006), sa seminár v súčasnej podobe sformoval v druhej polovici sedemdesiatych rokov a s malými prestávkami funguje dodnes. To znamená, že o pár rokov bude oslavovať okrúhle výročie, celé polstoročie. Nikto z pôvodných zakladajúcich členov už nie je jeho stálou súčasťou, a teda došlo k úplnému odovzdaniu žezla inej generácii. Aktuálnymi členmi seminára sú Miroslav Repický a Peter Eliaš zo SAV, Jaroslav Šupina z UPJŠ, postdoktorandskí výskumníci UPJŠ Miguel Antonio Cardona Montoya a Serhii Bardyla, Vierka Gavalová z TUKE, ktorá je momentálne na materskej dovolenke, a nakoniec, doktorand Adam Marton. Veková štruktúra seminára je preto teraz vyvážená, so zástupcami mnohých vekových kategórií. Aby bola zabezpečená udržateľnosť seminára, musí sa zabezpečiť i prílev budúcich mladších členov. To je vo veľkej miere závis-

lé na Ústave matematiky UPJŠ, hlavným školiacim pracoviskom učiteľov matematiky v regióne pre druhý stupeň základných škôl, pre stredné školy a pre univerzity. Len upresním, že región Košíc je silne založený na technickom a informatickom priemysle, preto je dopyt po takýchto učiteľoch vysoký. Aby si Ústav matematiky UPJŠ zachoval svoju spôsobilosť vychovávať učiteľov matematiky, musí rozvíjať široké portfólio výskumu v nej, od krajne aplikovaného až po silne teoretické. Práve to posledné spadá do pôsobnosti seminára.

Problematika seminára sa rokmi presunula z dominantnej teórie množín, prípadne teoreticko-množinovej topológie, na prevažujúce aplikácie teórie množín v teoreticko-množinovej topológii, teórii reálnych funkcií, výberových princípov a pod. Teória množín bola založená Georgom Cantorom približne pred 150 rokmi, pričom topológia sa ako samostatná matematická disciplína vyčlenila na začiatku dvadsiateho storočia. Rozoberať ich históriu a súčasné výzvy je nad rámec tejto publikácie i autora tohto textu. Z ďalších odstavcov by nepriamo malo vyplývať, že o otvorené problémy nie je núdze. Ja by som však rád spomenul aspoň jeden významný výsledok, ku ktorému prispel Miguel Cardona a Diego Mejía s viedenskou skupinou, všetkých ešte spomeniem v ďalších odstavcoch. Dlhšie obdobie bola otvorená otázka, či by k štandardným axiómam teórie množín mohla byť pridaná axióma hovoriaca o rozdielnosti všetkých desiatich kardinálnych invariantov tzv. Cichoňovho diagramu, štandardného nástroja teoreticko-množinovej topológie. Len v posledných rokoch boli vyvinuté dostatočne jemné metódy teórie množín, ktoré dovolili dať na túto otázku kladnú odpoveď. Problém, aké poradia kardinálnych invariantov Cichoňovho diagramu sú možné, je však stále otvorený.

Zdrojov aktuálnych matematických problémov pre seminár je viacero. Sú nimi odborné časopisy, stretnutia komunity (konferencie, workshopy a pod.) a asi najvplyvnejším sú osobné kontakty s kolegami pracujúcimi v danej problematike. V prípade odborných časopisov sa dnes dá spoľahnúť na ich elektronickú verziu. Občas bývajú problémy s dostup-

nosťou kvôli ich cene, avšak často je možné nájsť predprintovú verziu na arXive alebo webovej stránke autora. Stretnutia komunity bývajú časté, teda niekoľkokrát ročne, i v tejto lokalite strednej Európy alebo jej blízkych miest. Zo všetkých spomeňme aspoň zimnú školu konajúcu sa každoročne v Česku. Samozrejme, účasť členov seminára na nich je ohraničená finančnými prostriedkami, ktoré závisia na získaní grantov.

Najväčším a najvplyvnejším centrom výskumu v oblastiach seminára je Viedeň. Menšie skupiny sa vyskytujú vo všetkých krajinách susediacich so Slovenskom. Aj keď sa so všetkými snažíme udržiavať rozumné vzťahy, momentálne výskumne najintenzívnejšie spolupracujeme s viedenskou skupinou. Obaja postdoktorandi na seminári pochádzajú z viedenskej školy, Miguel tam na Technickej univerzite absolvoval doktorandské štúdium a Serhii na Viedenskej univerzite niekoľkoročný postdoktorandský pobyt. Na Viedenskej univerzite absolvoval polročný postdoktorandský pobyt i autor textu. Z najväčšieho suseda Slovenska by som nemal zabudnúť spomenúť aspoň skupinu v Gdaňsku.

Tradičným centrom blízkym Košiciam je Pražská škola. Historicky je to škola, z ktorej pochádza profesor Bukovský, a s ktorou udržoval intenzívne kontakty celý život po svojom presune do Košíc. Pôvodní členovia pražského seminára z obdobia, kedy tam pôsobil profesor Bukovský, už nie sú medzi nami alebo nepôsobia v Prahe. Aj v tomto prípade došlo k presunu žezla, tentokrát spolupráce, na mladšiu generáciu. Napriek tomu boli v posledných rokoch realizované viaceré pracovné cesty v oboch smeroch, pričom Vierka Gavalová absolvovala v Prahe počas svojho doktorandského štúdia niekoľkomesačné výskumné pobyty.

Zo vzdialenejších regiónov, intenzívna spolupráca prebieha s Diegom Mejíom, ktorý dlhoročne pôsobí v Japonsku. Je mentorom Miguela Cardonu už dlhšie obdobie a veľká časť výskumu v rámci dizertačnej práce Vierky Gavalovej prebiehala v spolupráci s ním. Za posledné obdobie došlo k pracovným návštevám Vierky Gavalovej, Miguela Cardonu a autora tohto textu v Japonsku a opačne, k pracovným návštevám

Diega v Košiciach. Miroslav Repický spolu s Diegom vedú výskum slalomových kardinálnych invariantov, do ktorého sú zapojení i iní členovia seminára.

Intenzívna spolupráca prebieha i so skupinou zaoberajúcou sa topológiou a reálnymi funkciami s centrom v Bratislave. Pod vedením docentky Holej sme spolu na obdobie rokov 2020 až 2025 získali grant APVV s názvom Topologické štruktúry a priestory funkcií.

Týmto by som ukončil sumár niekoľkých faktorov, ktoré silne ovplyvňujú ako sa bude seminár v budúcnosti vyvíjať. Čitateľ by mi mohol určite vyčítať, že som neidentifikoval tie faktory, ktoré by mohli do vývoja seminára zasiahnuť negatívne. Mojou úlohou však nebolo urobiť hĺbkovú a úplnú analýzu budúcnosti seminára, ale priniesť pohľad na jeho možnú budúcnosť. Pre mňa to znamená tú pozitívnu budúcnosť.

Obrazová příloha



Obrázok 1: Seminár pri príležitosti sedemdesiatych narodenín prof. Leva Bukovského, Košice 2009 (rečník Peter Vopěnka, prvý rad zľava: Lev Bukovský, Aleksander Błaszczyk, Peter Simon, Bohuslav Balcar, Michal Staš, druhý rad sprava: Zuzana Bukovská, Peter Eliaš, Miroslav Repický).



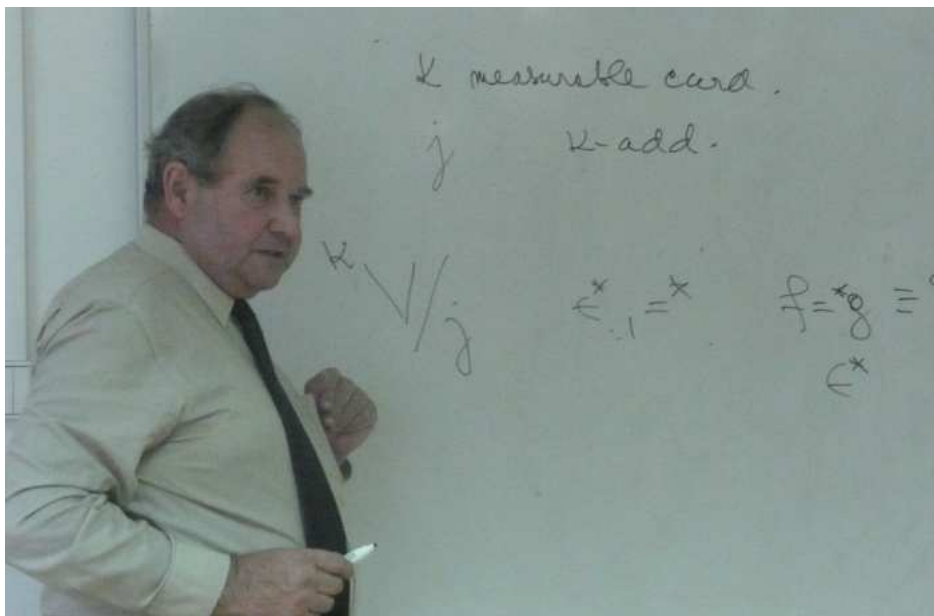
Obrázok 2: Raut po seminári pri príležitosti sedemdesiatych narodenín prof. Leva Bukovského, Košice 2009 (zľava: Lev Bukovský, Peter Vopěnka, Bohuslav Balcar, Zuzana Bukovská, Peter Simon, Aleksander Błaszczyk, Lajos Soukup).



Obrázok 3: Seminár pri príležitosti sedemdesiatych narodenín prof. Leva Bukovského, Košice 2009 (sprava: Michal Staš, Jozef Haleš, Miroslav Repický, Peter Eliaš diskutujú s vtedajším riaditeľom Ústavu matematických vied UPJŠ Romanom Sotákom).



Obrázok 4: Seminár pri príležitosti návštevy Pratulnanda Dasa z Indie, Košice 2013 (zľava: Michal Dečo, Miroslav Repický, Lev Bukovský, Jaroslav Šupina).



Obrázok 5: Prof. Bukovský prednáša na medzinárodnej konferencii SETMATH z príležitosti svojich osemdesiatych narodenín, Košice 2019



Obrázok 6: Medzinárodná konferencia SETMATH z príležitosti osemdesiatych narodenín prof. Leva Bukovského, Košice 2019



Obrázok 7: Spomienková prechádzka účastníkov seminára prof. Bukovského a ich rodinných príslušníkov, Košice-Alpinka, december 2021 (zľava: Jaroslav Šupina, Ladislav Spišiak, Peter Eliaš, Janka Krajčiová, Stanislav Krajči, Zuzana Bukovská, Michal Dečo, Jozef Haleš, Mária Halešová, Miroslav Repický).



Obrázok 8: Spomienková prechádzka účastníkov seminára prof. Bukovského a ich rodinných príslušníkov, Košice-Alpinka, december 2022 (zľava: Michal Dečo, Ladislav Spišiak, Miroslav Repický, Zuzana Bukovská, Mária Halešová, Jozef Haleš s dcérou Rebekou, Jaroslav Šupina, Miguel Cardona).

Štefan Tkačik, Zuzana Bukovská, Jaroslav Šupina

KOŠICKÁ MATEMATICKÁ ŠKOLA
TEÓRIE MNOŽÍN A TOPOLOGIE
SEMINÁR PROF. LEVA BUKOVSKÉHO

1. diel

Rozsah: 91 strán

Náklad: 200 ks

Vydanie: prvé

Rok vydania: 2023

Vydavateľ: VERBUM - vydavateľstvo KU v Ružomberku
Hrabovská cesta 5512/1A, 034 01 Ružomberok
<http://ku.sk>, verbum@ku.sk

ISBN 978-80-561-1031-7