

**Požiadavky k štátnej skúške
pre študentov rozširujúceho štúdia učiteľstva matematiky
z MATEMATIKY a didaktiky matematiky**

Jazyk matematiky a teória množín

- Znalosť sémantiky výrokovej logiky: Definície základných pojmov výrokovej logiky – výroku, zloženého výroku, logických spojok, formuly výrokovej logiky a ich ilustrácia na príkladoch. Definícia pravdivostnej hodnoty formuly a jej ilustrácia na príklade. Znalosť definície tautológie a jej príklad. Opis sémantického dôsledku (vyplývania) systému formúl výrokovej logiky a sémanticky ekvivalentných formúl. Znenie de Morganových pravidiel.
- Znalosť syntaxu výrokovej logiky (odvodzovania): Axiómy výrokovej logiky, odvodzovacie pravidlo modus ponens, definícia dôkazu, dokazateľnosť formuly výrokovej logiky, konzistentnosť a spornosť systému formúl výrokovej logiky, veta o tranzitivnosti implikácie, zákon Dunsca Scota, veta o dedukcii, veta o substitúcii, veta o dôkaze sporom. Veta o úplnosti výrokovej logiky. Schopnosť ilustrovať všetky kľúčové pojmy a spôsoby dokazovania na ilustračných príkladoch.
- Znalosť základných pojmov teórie množín: Axiómy teórie množín. Určovanie množín. Russelov paradox (množina všetkých množín), paradox holiča. Princípy tvorby množín. Definície operácií s množinami a ich ilustrácia na príkladoch, definície ekvivalencie množín a jej rozkladu spolu s príkladmi so školskej matematiky. De Morganove zákony a ďalšie identity. Vennove diagramy a ich použitie. Definície nekonečnej a konečnej množiny, ich príklady a odôvodnenie. Cantorova diagonála.
- Opis princípu dokazovania matematickou indukciou a ilustrácia jej použitia na príkladoch.
- Znalosť základných pojmov predikátovej logiky: Všeobecný a existenčný kvantifikátor a ich ilustrácia ich uplatnenia na príkladoch. Kvantifikátory *aspoň*, *najviac*, *práve* a ich ilustrácia na príkladoch.

Matematická analýza

- Definícia funkcie a opis operácií s funkciami. Definícia suprema a infima funkcie, definícia funkcie ohraničenej, monotónnej, párnej, nepárnej, periodickej a ich ilustrácia na vhodných príkladoch a protipríkladoch vrátane elementárnych funkcií. Definícia prostej, zloženej a inverznej funkcie a opis ich vlastností prostredníctvom príkladov.
- Definícia číselnej postupnosti a opis bežných spôsobov jej zadania spolu s príkladmi. Definícia aritmetickej, geometrickej a Fibonacciho postupnosti a ich ilustrácia na príkladoch. Definícia ohraničenej postupnosti, konvergentnej postupnosti, limity postupnosti a ich ilustrácia na príkladoch. Opis súvisu medzi ohraničenosťou a konvergentnosťou postupnosti, ilustrácia na príkladoch.
- Definícia monotónnej postupnosti a veta o konvergencii monotónnej postupnosti. Definícia Eulerovho čísla ako limity špeciálnej číselnej postupnosti. Definícia vybranej postupnosti. Bolzano-Wierstrassovej veta a jej ilustrácia na príkladoch. Definícia fundamentálnej postupnosti. Cauchy-Bolzanovo kritérium konverencie postupnosti.
- Definícia číselného radu a jeho súčtu, definícia konvergentného a divergentného radu a ich ilustrácia na príkladoch. V podobe viet formulácia nutnej podmienky konverencie radu, opis vlastností súčtu radu a kritériá konverencie pre rady s nezápornými členmi. Ilustrácia použitia kritérií na príklade.
- Cauchyho a Heineho definícia limity funkcie v bode a prostredníctvom vety opis jej základných vlastností, resp. pravidiel na jej výpočet. Ilustrácia pojmu i vlastností na vhodne zvolených príkladoch. Jednostranné limity. Nevlastná limita vo vlastnom bode a vlastná limita v nevlastnom bode ilustrované na príkladoch. Definícia spojitosti funkcie v bode a spojitosti v bode zľava (sprava). Opis vzťahu medzi limitou a spojitosťou funkcie v bode. Ilustrácia týchto pojmov na príkladoch a protipríkladoch s obrázkami.
- Definícia spojitosti funkcie na množine a na uzavretom intervale. Vo forme viet opis vlastností funkcií spojitých na uzavretom intervale, ilustrácia na vhodne zvolených príkladoch a protipríkladoch. Uvedenie viet týkajúcich sa oboru hodnôt spojitých funkcií.

- Definícia derivácie funkcie v bode s ilustratívnym príkladom na vysvetlenie jej geometrického významu. Definícia derivácie funkcie v bode zľava, derivácie funkcie v bode sprava, nevlastnej derivácie funkcie v bode a objasnenie týchto pojmov spolu s ich opodstatnením na príkladoch. Definícia derivácie funkcie na množine. Opis základných pravidiel výpočtu derivácií funkcií, ako aj derivácií elementárnych funkcií vo forme viet.
- Znenie základných viet diferenciálneho počtu – Rolleho, Lagrangeovej, Cauchyho vety. Vysvetlenie použitia týchto viet na príkladoch.
- Definícia monotónnej funkcie. Použitie diferenciálneho počtu na vyšetrovanie monotónnosti funkcie. Nutná a postačujúca podmienka monotónnosti funkcie, postačujúca podmienka rýdzomonotónnosti funkcie v jazyku diferenciálneho počtu. Definícia extrému funkcie a jej stacionárneho bodu a ilustrácia týchto pojmov na vhodne zvolenom príklade s obrázkom. Znenie Fermatovej vety, viet o extréme spojitých funkcií na uzavretom intervale a o určení druhu lokálneho extrému.
- Priebeh funkcie. Použitie diferenciálneho počtu na vyšetrovanie priebehu funkcie. Postup vyšetrovania priebehu funkcie. Uvedenie príkladu netriviálnej funkcie s obrázkom a náčrt aplikácie postupu pre vyšetrovanie jej priebehu.
- Definícia primitívnej funkcie k funkcii a neurčitého integrálu a ich ilustrácia na vhodnom príklade. Opis metódy integrovania per partes, vetu, ktorá umožňuje jej použitie, ilustrácia jej aplikácie na vhodnom príklade. Opis štandardného postupu pri integrovaní funkcií racionálneho typu.
- Opis a vysvetlenie geometrickej motivácie na zavedenie určitého integrálu. Znalosť Riemannovej súčtovej definície určitého integrálu. Znalosť definície pojmov norma delenia, normálna postupnosť delení, integrálny súčet a znalosť vety o integrovateľnosti funkcie v ich kontexte.
- Opis základných vlastností určitého integrálu prostredníctvom viet týkajúcich sa integrovateľnosti funkcií. Znenie Newtonovej-Leibnitzovej formuly ako fundamentálnej vety matematickej analýzy a ilustrácia jej použitia na vhodne zvolenom netriviálnom príklade.
- Vráťane definícií príslušných pojmov a uvedenia viet vzťahujúcich sa k téme opis toho, ako sa aplikuje určitý integrál pri výpočte obsahu elementárnej oblasti, objemu rotačného telesa, obsahu rotačnej plochy a dĺžky rovinnej krivky. Ilustračné príklady na takéto výpočty.

- Definície Taylorovho polynómu, Taylorovho radu a znalosť Taylorovho vzorca. Znalosť vety o konvergencii Taylorovho radu. Znalosť toho, na čo sa Taylorov polynóm a Taylorov rad používa a troch konkrétnych príkladov rozvoja elementárnej funkcie do Taylorovho radu.

Algebra

- Definícia binárnej relácie na množine. Definícia reflexívnej, symetrickej, antisymetrickej, tranzitívnej, ireflexívnej, súvislej, trichotomickej relácie, príklad na každú z nich a objasnenie rozdielov medzi nimi na vhodných príkladoch. Definícia ekvivalencie, rozkladu množiny, opis toho, ako spolu súvisia, a ich ilustrácia na príkladoch. Definícia (čiastočne/neostro) usporiadanej množiny, úplne/ostro usporiadanej množiny, ich príklady a vysvetlenie rozdielov medzi nimi. Definícia zobrazenia ako špeciálnej relácie.
- Definícia binárnej operácie. Definícia grupoidu, pologrupy, monoidu a grupy. Ilustrácia každého z týchto pojmov aspoň na dvoch rôznych príkladoch a objasnenie rozdielov medzi nimi. Znalosť a odôvodnenie toho, akou štruktúrou je každá číselná množina v školskej matematike separátne vzhľadom na aditívnu a vzhľadom na multiplikatívnu operáciu.
- Definícia okruhu, oboru integrity, telesa a poľa. Ilustrácia každého z týchto pojmov aspoň na dvoch rôznych príkladoch a objasnenie rozdielov medzi nimi na protipríkladoch. Znalosť a odôvodnenie toho, akou štruktúrou je každá číselná množina v školskej matematike spolu vzhľadom na súčet a súčin.
- Opis grupy symetrií geometrických útvarov, grupy permutácií množín a abstraktných grup. Cayleyho veta, jej vysvetlenie a význam.
- Definícia matice a jej špeciálnych typov. Definícia operácií s maticami a ich ilustrácia na príkladoch. Definícia hodnosti matice, opis spôsobov, akými ju možno určiť/vypočítať, jej interpretácia vo vhodnom kontexte a objasnenie tohto všetkého na vhodnom príklade.
- Definícia determinantu matice, opis postupov, ako ho možno vypočítať (Laplaceov rozvoj determinantu, Sarrusovo pravidlo), a ich demonštrácia na vhodnom výpočtovo nenáročnom príklade s maticou typu 4×4 . Znalosť toho prečo a ako sa používajú determinanty.

- Definícia sústavy lineárnych rovníc a opis jej riešiteľnosti. Opis Gaussovej eliminačnej metódy a Cramerovho pravidla ako metód riešenia sústavy lineárnych rovníc, ilustrácia ich použitia na vhodných príkladoch a porovnanie ich silných a slabých stránok. Frobeniova veta.
- Definícia vektorového priestoru a aspoň tri jeho príklady s rôznymi objektmi. Definícia lineárnej kombinácie vektorov, lineárnej závislosti/nezávislosti vektorov, bázy vektorového priestoru a jeho dimenzie. Objasnenie všetkých týchto pojmov na príkladoch.
- Definícia deliteľnosti dvoch čísel v okruhu celých čísel, najväčšieho spoločného deliteľa, najmenšieho spoločného násobku a demonštrácia týchto pojmov na príkladoch. Súvis najväčšieho spoločného deliteľa a najmenšieho spoločného násobku. Definície triviálneho a vlastného deliteľa celého čísla, prvočísla a zloženého čísla s ilustráciou na príkladoch. Znenie základnej vety aritmetiky, opis jej využitia v podobe algoritmu a na príklade ukážka jeho aplikácie. Kritéria deliteľnosti číslom 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12 vo forme vety a odôvodnenie, prečo sú také, aké sú. Opis, odôvodnenie a využitie Euklidovho algoritmu, ilustrácia jeho použitia na vhodne zvolenom príklade.
- Definícia polynómu a polynomickej funkcie nad konečnými a nekonečnými číselnými obormi, ich príklady a objasnenie rozdielov medzi nimi. Opis deliteľnosti polynómov spolu s vhodnými príkladmi. Definícia koreňa polynomickej funkcie. Základná veta algebry a jej dôsledky. Charakterizácia ireducibilných polynómov nad poľom reálnych a nad poľom komplexných čísel, korene polynomických funkcií s koeficientmi v $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.
- Definícia lineárneho zobrazenia a aspoň dva jeho príklady. Základná veta o lineárnych zobrazeniach. Opis matice lineárneho zobrazenia, skladania lineárnych zobrazení, inverzného lineárneho zobrazenia a vysvetlenie týchto pojmov na vhodnom príklade.

Geometria

- Znalosť definície afinného priestoru, ilustrácia tohto pojmu na aspoň dvoch príkladoch, prostredníctvom vety opis jeho vlastností. Definícia lineárnej sústavy súradníc a objasnenie tohto pojmu na príklade. Definícia podpriestoru afinného priestoru a znalosť aspoň troch jeho príkladov. Definície nadroviny, priamky a roviny ako špeciálnych podpriestorov afinného priestoru.
- Znalosť parametrického vyjadrenia afinných podpriestorov, znalosť parametrického vyjadrenia priamky a roviny ako podpriestorov 3-rozmerných afinného priestoru. Znalosť vyjadrenia podpriestoru rovnicami, osobitne nadroviny, priamky a roviny v priestoroch uplatňovaných v školskej matematike. Ilustrácia všetkých uvedených pojmov na konkrétnych príkladoch. Využitie rovníc podpriestorov na určovanie ich vzájomných polôh.
- Opis vzájomnej polohy podpriestorov afinného priestoru prostredníctvom definície. Na každý z pojmov tejto definície treba mať poruke ilustračný príklad. V afinnom priestore dimenzie 3 opis vzájomnej polohy dvoch priamok, priamky a roviny, dvoch rovín a na príkladoch demonštrácia toho, ako sa táto poloha určí. Definícia pričky mimobežiek a na príklade ukážka postupu jej určenia, keď je zadaný jej smerový vektor a keď je zadaný bod, ktorým mám prechádzať.
- Definícia usporiadania priamky určeného lineárnou sústavou súradníc a s využitím tohto pojmu definícia úsečky, polpriestoru, polpriamky, polroviny. Definícia vrstvy, klina a ako ich špeciálnych prípadov pásu a dutého uhla. Definícia priameho a vypuklého uhla. Definícia konvexnej množiny a prostredníctvom vety opis všetkých konvexných množín na priamke. Objasnenie uvedených pojmov na príkladoch a protipríkladoch. Definície konvexného obalu množiny, konvexného mnohostenu a ako jeho špeciálnych prípadov definícia simplexu, trojuholníka a štvorstena.
- Definícia lineárnej kombinácie bodov a ilustrácia tohto pojmu na príkladoch. Definícia lineárne nezávislých/závislých bodov a súvis tohto pojmu s lineárnou nezávislosťou/závislosťou vektorov. Uplatnenie uvedených pojmov pri opise konvexných množín.
- Definícia deliaceho pomeru a jeho ukážka na príklade. Súvis tohto pojmu s lineárnou kombináciou bodov.

- Definícia vektorového priestoru so skalárnym súčinom a jeho ukážka na viacerých príkladoch. Opis jeho vlastností prostredníctvom viet, vrátane Cauchyho. Definícia ortogonálnych a ortonormálnych vektorov a ich ukážky na viacerých (rôznych) množinách vektorov. Definícia totálnej kolmosti vektorových podpriestorov a aspoň dve konkrétne ilustrácie tohto pojmu na príkladoch z priestorov dimenzie 2 alebo 3.
- Definícia vonkajšieho a vektorového súčinu, znalosť toho, na aký účel a ako sa používajú, ilustrácia aplikácie na príkladoch, vrátane definície obsahu trojuholníka.
- Definícia n-rozmerného euklidovského priestoru. Definícia vzdialenosti dvoch bodov a opis jej vlastností v podobe viet. Definícia karteziánskej sústavy súradníc v n-rozmernom euklidovskom priestore.
- Opis vzájomnej polohy podpriestorov n-rozmerného euklidovského priestoru. Definícia kolmosti a totálnej kolmosti podpriestorov a príklady i protipríklady takýchto dvojíc. Definícia vzdialenosti bodu od podpriestoru euklidovského priestoru, objasnenie koncepcie tohto pojmu a znalosť jeho aplikácie, vrátane príkladov. Definícia odchýlky podpriestorov euklidovského priestoru a jej ukážky na príkladoch.
- Dôležité pojmy analytickej geometrie v priestoroch $\mathbf{E}_2$ a $\mathbf{E}_3$ v kontexte školskej geometrie.
- Znenie, vysvetlenie a aplikácia kosínusovej, sínusovej vety a vety o priemetoch. Herónov vzorec.
- Kružnica ako špeciálny prípad množiny bodov definovanej pomocou vzdialenosti – definícia, určujúce prvky, vlastnosti, príklady, vysvetlenie na obrázkoch. Definícia a rovnica dotýčnice ku kružnici a k tomu ilustračný príklad.

Didaktika matematiky

Cieľom štátnej skúšky z didaktiky matematiky je preveriť, či študent rozumie podstate školskej matematiky, ovláda základné princípy jej vyučovania a dokáže navrhnúť a didakticky zdôvodniť konkrétne vyučovacie postupy a aktivity. Študent má preukázať schopnosť premýšľať o školskom učive matematiky nielen z hľadiska jeho obsahu, ale najmä z hľadiska žiaka a výučby.

a) Úlohou skúšaného študenta je vyriešiť úlohu zo školskej matematiky (zdrojom sú testy externej časti maturity z matematiky), zaradiť ich do vhodného tematického celku školskej matematiky. (Pod termínmi škola a školská matematika sa rozumejú všetky typy základných i stredných škôl a poznatky z matematiky, ktoré sú obsahom Štátneho vzdelávacieho programu pre ISCED 2 a ISCED 3.)

b) Skúšaný študent má ďalej predviesť pedagogické schopnosti pre vybrané témy zo školskej matematiky. Otázky sú tematicky zamerané na kľúčové oblasti školskej matematiky. Nejde o reprodukciu učiva, ale o jeho didaktickú analýzu, návrh spôsobu vyučovania a reflexiu možných ťažkostí žiakov. Témy sú vytýčené vzdelávacími štandardami v Inovovanom štátnom vzdelávacom programe pre ISCED 2 a ISCED 3:

- Zlomky a operácie so zlomkami (porovnať rôzne modely zlomkov, vysvetliť operácie so zlomkami pomocou modelov, identifikovať typické miskoncepce pri operáciách so zlomkami).
- Kritériá deliteľnosti (formulovať jednotlivé kritériá a odôvodniť ich).
- Najmenší spoločný násobok a najväčší spoločný deliteľ daných čísel. Prvočísla a zložené čísla (algoritmy na určovanie najmenšieho spoločného násobku a najväčšieho spoločného násobku).
- Funkcia v školskej matematike. Definícia funkcie, definičný obor a obor hodnôt funkcie. Graf funkcie, vlastnosti funkcií.
- Funkcie v školskej matematike (porovnať rôzne reprezentácie funkcie – tabuľka, graf, predpis, slovný opis, opísať jednotlivé funkcie zo školskej matematiky – lineárna, kvadratická, lineárna lomená, exponenciálna, logaritmická, goniometrická a ich vlastnosti).
- Obsah trojuholníka, pravouholníka, rovnobežníka a lichobežníka (odvodenie vzťahov).

- Pytagorova veta (porovnať geometrický a algebraický prístup k Pytagorovej vete, identifikovať ťažkosti pri aplikácii Pytagorovej vety).
- Kombinatorika v školskej matematike. Pravidlo súčtu a súčinu. Variácie, permutácie, kombinácie. Faktoriál, kombinačné číslo. Prístupy k vyučovaniu kombinatoriky a rôzne metódy/stratégie pri riešení úloh zo školskej kombinatoriky.
- Pravdepodobnosť v školskej matematike. Základné pojmy pravdepodobnosti a štatistiky. Udalosť a jej pravdepodobnosť.
- Štatistika v školskej matematike, základné pojmy a vzťahy. Štatistický súbor, štatistický znak.

Odporúčaná literatúra:

- Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky
- Kritické miesta školskej matematiky
- KRITICKÁ MÍSTA MATEMATIKY ZÁKLADNÍ ŠKOLY: METODICKÝ MATERIÁL PRO UČITELE
- Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů
- učebnice matematiky pre 2. stupeň ZŠ a gymnáziá