KATOLÍCKA UNIVERZITA V RUŽOMBERKU

formujúca myseľ i srdce

KATOLÍCKA UNIVERZITA V RUŽOMBERKU

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Lucia Csachová

Kto vie nech učí

Vzdelávací materiál

X.

Projekt „Kto vie, nech učí“ sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje.

Kód projektu: 312011AKK9 Kód výzvy: OPLZ-PO1/2019/DOP/1.3.1-01

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

www.esf.gov.sk www.minedu.gov.sk www.ludskezdroje.gov.sk www.ku.sk

Katolícka univerzita v Ružomberku
Pedagogická fakulta

RNDr. Lucia Csachová, PhD.

KTO VIE, NECH UČÍ

Vzdelávací materiál X.

Vzdelávací materiál je výstupom projektu „**Kto vie, nech učí**“

Operačný program: Ľudské zdroje
Spolufinancovaný fondom: Európsky sociálny fond
Prioritná os: Vzdelávanie
Kód výzvy: OPLZ-PO1/2019/DOP/1.3.1-01; 312011AKK9

Investičná priorita: Zlepšenie kvality, efektívnosti a prístupu k terciárnemu ekvivalentnému vzdelávaniu s cieľom zvýšiť počet študujúcich a úroveň vzdelania, najmä v prípade znevýhodnených skupín.

Špecifický cieľ: Zvýšiť kvalitu VŠ vzdelávania a rozvoj ľudských zdrojov v oblasti výskumu a vývoja s cieľom dosiahnuť prepojenie VŠ vzdelávania s potrebami trhu práce.

Hlavný cieľ: Účinnejšie prepojiť teoretické vzdelávanie na akademickej pôde a praktické vzdelávanie v cvičných školách a cvičných školských zariadeniach u študentov Pedagogickej (PF) a Filozofickej fakulty (FF) Katolíckej univerzity (KU) v Ružomberku a dosiahnuť tak skvalitnenie prípravy budúcich pedagógov a odborných pracovníkov.

Podaktivita č. 3: Tvorba podporných metodických a vzdelávacích materiálov

VERBUM – vydavateľstvo Katolíckej univerzity v Ružomberku

Hrabovská cesta 1, 034 01 Ružomberok

2023

ISBN 978-80-561-1046-1

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Jednotky dĺžky, obsahu a objemu a Pytagorova veta
(vybrané témy zo školskej geometrie)

Obsah

Úvod

V celoslovenských testovaniach matematiky T5 a T9 a v externej časti maturity z matematiky je jednou z testovaných tematických oblastí Geometria a meranie. Na základe analýzy výsledkov žiakov v týchto testovaniach (Csachová, Jurečková, Tkačik, 2021) a (Valentová, 2022) je možné povedať, že práve školská geometria patrí medzi tzv. *kritické miesta školskej matematiky,* teda oblasti, v ktorých žiaci opakovane a často zlyhávajú (Rendl, Vondrová, 2013)[1].

Nepriaznivá situácia v školskej geometrii trvá už ale dlhší čas. Za neúspechom žiakov v úlohách z tejto oblasti nestoja len zmeny vo vzdelávacom programe či učebniciach, ale i nedostatočné budovanie geometrických poznatkov. Niektorí učitelia na 1. a 2. stupni neradi učia geometriu, čo sa prenáša aj na žiakov, a odôvodňujú to tým, že „nepáči sa mi (geometria)", či „to sa mám hrať na 2. stupni s kockami?". V skutočnosti títo učitelia geometrii nerozumejú. V učebniciach 1. stupňa je prístup ku geometrii veľmi abstraktný. Zavádzajú sa pojmy ako bod, úsečka, priamka, polpriamka, pričom žiaci môžu mať pocit, že geometria nepatrí do reálneho sveta a chvíľku ju „pretrpia". Takto si ale nevytvoria správne predstavy o základných objektoch poznatkového systému a vzťahoch medzi nimi, a vzniknú buď nesprávne schémy týkajúce sa geometrie alebo nevzniknú vôbec. (Informácie o poznatkoch a schémach budú uvedené nižšie.) Tento prístup pokračuje aj na 2. stupni pri konštrukčných úlohách[2], a vystupňuje sa na konci nižšieho stredného vzdelávania pri telesách.

Problémy vo vyučovaní geometrie vyplývajú aj z neochoty učiteľov nižšieho stredného vzdelávania zistiť, čo sa „dialo" v geometrii v rámci primárneho vzdelávania, či čo sa bude diať na „ďalšom stupni", teda v rámci vyššieho stredného vzdelávania.[3] Učiteľ teda netuší (alebo sa mu nechce zisťovať), na akých poznatkoch môže stavať, a čo musí svojich žiakov „naučiť", aby mali pevné základy pre stredoškolskú geometriu. Táto neinformovanosť učiteľov o postupnosti poznatkov z geometrie, zotrvávanie na „osvedčených" postupoch „vysvetľovania látky" a zo strany žiakov často mechanické učenie vyúsťujú do formálneho poznatku, ktorému žiak nerozumie a nevie ho ani aplikovať pri riešení úloh. (Rendl, Vondrová, 2013) uvádzajú, že vzniká nízka citlivosť učiteľa na formálne znalosti žiaka. Znamená to, že učiteľ nevie rozlíšiť, či žiak si daný poznatok osvojil len mechanicky alebo osvojenie bolo „úspešné" (teda s porozumením), a tak nevyvíja ďalšie úsilie o porozumenie. Hejný v (2014, str. 39) uvádza ako prvé príčiny mechanického učenia sa matematiky

[1] (Rendl, Vondrová, 2013, str. 7-8) „... oblasti, v nichž žáci často a opakovaně selhávají, jinak řečeno, která nezvládnou na takové úrovni, aby se jejich matematická gramotnost produktivně rozvíjela a také aby mohla byt tvořivě užívána v každodenním životě."

[2] Napríklad vyžadovanie presného symbolického zápisu v rozbore a postupe konštrukcie zo strany učiteľa vytvára u niektorých žiakov na 2. stupni tak silný blok, že radšej sa do úlohy ani nepustia.

[3] Toto platí pre celú školskú matematiku, nielen pre geometriu.

predčasné „vyzbrojenie“ dieťaťa silnými nástrojmi a časová tieseň, v ktorej má dieťa riešiť úlohy. Obidve príčiny sú veľmi charakteristické pre školskú matematiku, geometriu nevynímajúc.

Práve tieto príklady formalizmu sa prejavujú napríklad pri dvoch zvolených témach zo školskej geometrie – Jednotky dĺžky, obsahu a objemu a Pytagorova veta, ktorej sa venujem v študijnom materiáli. Prvá téma prebieha dlhodobo, od nástupu žiaka do školy, až po maturitu. Druhá téma je zaradená takmer „izolovane“ do 9. ročníka základnej školy.

V prvej kapitole tohto študijného materiálu sa venujem obsahu školskej geometrie na základnej a strednej škole. V druhej kapitole stručne opisujem proces vytvárania matematického poznatku podľa teórie generického modelu profesora Hejného. V tretej kapitole sa venujem jednotkám dĺžky, obsahu a objemu a štvrtá kapitola je zameraná na Pytagorovu vetu.

Na začiatku by som chcela poďakovať pani učiteľke Monike Janičovej, ktorá ma motivovala v práci s jednotkami, a študentkám rozširujúceho štúdia Laure Repovej, Petre Turjakovej, Silvii Valušovej, Anne Bellovej, Lenke Ďuricovej, Vierke Oleárovej, Veronike Lilkovej a Mariane Rodriguez, ktoré mi pomohli pochopiť proces vytvárania poznatkov spojených s Pytagorovou vetou.

1 Školská geometria a jej obsah

Školskú geometriu[4] je možné rozdeliť na 5 oblastí:

1. *planimetria*, ktorá sa venuje rovinným geometrickým útvarom a ich vlastnostiam, konštrukčným úlohám a zobrazeniam,
2. *stereometria* zameraná na polohové a metrické vlastnosti geometrických útvarov v priestore,
3. *goniometria*, v centre ktorej sú goniometrické funkcie a rovnice, nerovnice, ale i trigonometria,
4. *analytická geometria* opisujúca rovinné a priestorové objekty pomocou súradníc a vektorov,
5. *konštrukčná (deskriptívna) geometria* využívajúca zobrazovacie metódy a prostriedky (Šedivý, Vallo, 2009).

Týchto päť uvedených oblastí je zakomponovaných v Inovovanom štátnom vzdelávacom programe pre ISCED 1, 2, 3 v rôznych tematických celkoch. Niektoré témy sa v rôznych ročníkoch opakujú, poznatky z nich sa rozširujú (napríklad ako premena jednotiek), pretože proces vytvárania poznatkov je postupný a prebieha tzv. špirálovite. Témy a „podtémy" pre jednotlivé ročníky sú zhrnuté v Tab. 1, 2. Pre vyššie stredné vzdelávanie nie sú štandardy rozdelené po ročníkoch, ale podľa tematických oblastí – Tab. 3. (Informácie o obsahových a výkonových štandardoch sú čerpané z IŠVP pre primárne vzdelávanie, nižšie stredné vzdelávanie a vyššie stredné vzdelávanie, zdroje sú uvedené v popise príslušnej tabuľky.)

Ročník	*Témy zo školskej geometrie*
Prvý	zhodné zobrazenie – osová súmernosť (na propedeutickej úrovni), neštandardné jednotky dĺžky (stopa, palec, dlaň, lakeť, iný predmet – napr. spinka)
Druhý	zhodné zobrazenie – posunutie (na propedeutickej úrovni), v štvorcovej sieti dokresliť (dorysovať) osovo súmerný obrázok, neštandardné jednotky dĺžky: palec, stopa, lakeť
Tretí	dĺžka úsečky v milimetroch, dĺžka, šírka, meranie jednotky dĺžky: milimeter (mm), centimeter (cm), decimeter (dm), meter (m), kilometer (km), vrchol, hrana a stena kocky, stavba z kociek, plán stavby z kociek (pôdorys stavby s vyznačeným počtom na sebe stojacich kociek), rady, stĺpce (pri stavbách z kociek)

[4] Podľa (Csachová, Jurečková, Tkačik, 2021, str. 10) pod pojmom školská matematika sa rozumejú „vedomosti a zručnosti vytýčené a stanovené v Inovovanom Štátnom vzdelávacom programe pre predmet Matematika v rámci vzdelávacej oblasti Matematika a práca s informáciami. Teda sú to vedomosti a zručnosti, ktoré by mali absolventi základnej školy a strednej školy z matematiky vedieť." Obdobné vymedzenie platí pre školskú geometriu.

Štvrtý	premena jednotiek dĺžky (mm, cm, dm, m, km), zmiešané jednotky dĺžky, premena zmiešaných jednotiek dĺžky

Tab. 1 Stručný prehľad tém školskej geometrie v jednotlivých ročníkoch primárneho vzdelávania (zdroj: podľa IŠVP, primárne vzdelávanie)

Ročník	*Témy zo školskej geometrie*
Piaty	konštrukčné úlohy, premena jednotiek dĺžky v obore prirodzených čísel, osová a stredová súmernosť, stavby z kociek, propedeutika objemu
Šiesty	obsah obdĺžnika, štvorca a pravouhlého trojuholníka v desatinných číslach, jednotky obsahu, trojuholník, zhodnosť trojuholníkov, uhly v trojuholníku, konštrukčné úlohy s využitím viet o zhodnosti, trojuholníková nerovnosť, výšky v trojuholníku
Siedmy	kváder a kocka, ich povrch a objem v desatinných číslach, premena jednotiek objemu
Ôsmy	rovnobežník, lichobežník, obvod a obsah rovnobežníka, lichobežníka a trojuholníka, konštrukčné úlohy pre štvoruholníky, kruh, kružnica, vzájomná poloha kružnice a priamky, Tálesova kružnica, stredový uhol, kruhový výsek, obvod a obsah kruhu, dĺžka kružnice, hranol, objem a povrch (kocky, kvádra a hranolu)
Deviaty	Pytagorova veta

Tab. 2 Stručný prehľad tém školskej geometrie v jednotlivých ročníkoch nižšieho stredného vzdelávania (zdroj: IŠVP, nižšie stredné vzdelávanie)

Témy zo školskej geometrie
Základné rovinné útvary a ich vlastnosti
Množiny bodov daných vlastností a konštrukcie
Znázorňovanie trojrozmerného priestoru
Telesá, ich objemy a povrchy
Meranie

Tab. 3 Stručný prehľad tém školskej geometrie v rámci vyššieho stredného vzdelávania (zdroj: IŠVP, vyššie stredné vzdelávanie)

2 Proces vytvárania matematických poznatkov

Aby učiteľ matematiky vedel dobre manažovať edukačný proces, potrebuje rozumieť procesu, ktorý prebieha, keď sa žiak „učí" nejaký matematický poznatok. Tento proces sa môže zdať ako postupnosť niekoľkých krokov (napríklad vysvetlenie, porozumenie, zapamätanie, aplikácia), ktoré sú realizované napríklad počas jednej či dvoch vyučovacích hodín v škole a jedného popoludnia, kedy si žiak urobí domácu úlohu. V skutočnosti proces vytvárania matematického poznatku môže prebiehať aj niekoľko rokov a je ovplyvnený mnohými faktormi. Táto kapitola sa stručne venuje tomuto procesu.

Hejný v (Hejný, Novotná, Stehlíková, 2004, str. 25) rozlišuje štyri skupiny matematických poznatkov – objekty, vzťahy, postupy a schémy. Uvádzam vymedzenie týchto skupín príkladmi zo školskej geometrie:

1. *Objekty* sú základné stavebné kamene štruktúry poznatkov. Pre školskú geometriu to môže byť napríklad bod, úsečka, priamka, polpriamka, uhol, kružnica či os uhla.

2. *Vzťahy* vzájomne prepojujú dva alebo viac objektov, prípadne prepájajú vzťahy. Vzťahy pritom môžu mať povahu *tvrdenia* (napríklad os uhla rozdeľuje uhol na dva rovnako veľké uhly, súčet veľkostí vnútorných uhlov v ľubovoľnom trojuholníku je 180°, Eulerova veta pre mnohosteny, ...) alebo *vzorca* (napríklad vzorec pre výpočet obsahu trojuholníka, objemu kvádra, analytické vyjadrenie priamky, vety zamerané na vytvorenie rezov telies, ...). Niektoré vzťahy môžu vystupovať v oboch rolách. Napríklad Pytagorova veta môže byť tvrdenie (ktoré je potrebné dokázať), ale aj vzorec (ktorý sa použije na výpočet dĺžky prepony pravouhlého trojuholníka).

3. *Postupy* označujú rôzne poznatky. Patria sem *algoritmy* a *návody* na realizáciu procedúry (napríklad postup konštrukcie rovnostranného trojuholníka či pravidelného šesťuholníka), *riešiteľské stratégie* zamerané na riešenie neštandardných matematických úloh (napríklad riešenie geometrických úloh vhľadom, Divišová, 2012) a *argumentácie* pre hľadanie súvislostí javov a vzťahov (napríklad pri vete o súčte veľkostí vnútorných uhlov v ľubovoľnom trojuholníku).

4. Pod *schémou* sa rozumejú „ucelené predstavy, ktoré sa vytvárajú vo vedomí človeka na základe mnohonásobne opakovanej skúsenosti a sú nositeľom mnohých konkrétnych poznatkov, ktoré človek pozná len nepriamo, t. j. vie si ich vyvodiť zo schémy" (Hejný, Novotná, Stehlíková, 2004, str. 25) (napr. zo schémy kocky je možné odvodiť počet stien, vrcholov, hrán, telesových uhlopriečok, ...).

Hranice medzi jednotlivými skupinami poznatkov nemusia byť ostré. Poznatok môže byť pre jedného žiaka vzťahom, pre iného postupom. Poznatky takisto môžu byť ale aj nepresné alebo úplne chybné, sú vlastné danému človeku.

Proces zrodenia a budovania matematického poznatku sa skladá z viacerých etáp, ktoré nie sú ostro oddelené, prepájajú sa – Obr. 1: *motivácia, izolované modely, zovšeobecnenie, generické modely, abstrakčný zdvih*, *kryštalizácia*.

<table>
<tr><td rowspan="2">motivácia</td><td>→</td><td>izolované modely</td><td>1 →</td><td>generický model
procesuálny → konceptuálny</td><td>2 →</td><td>abstraktný poznatok</td></tr>
<tr><td colspan="6">kryštalizácia</td></tr>
</table>

Obr. 1 Rozklad poznávacieho procesu do etáp[5] (zdroj: podľa (Hejný, 2014, str. 73), kognitívne posuny označené šípkami 1, 2 sú zdvihy, zdvih 1 – zovšeobecnenie, zdvih 2 – abstrakcia)

Na začiatku poznávacieho procesu je *motivácia*. Motiváciou sa rozumie rozpor medzi tým, čo „neviem“ a čo by som „potreboval vedieť“ (Hejný, 2014, str. 43), pričom sa má dôraz klásť na vnútornú motiváciu žiaka. Učiteľ môže použiť na zvýšenie motivácie rôzne nástroje ako súťaže, atraktívny kontext pre úlohy, pocit úspechu a radosti žiaka, pričom ale musí zadávať žiakom primerané úlohy[6].

Ďalšou je etapa *izolovaných modelov*[7]. V tejto etape sa postupne získavajú skúsenosti s konkrétnymi prípadmi budúceho poznatku, tzv. modelmi. Čím viac ich dieťa spozná, tým môže byť jeho poznatok pevnejší.[8] Táto etapa nemusí predstavovať len zbieranie konkrétnych skúseností, ale môže to byť aj hlbšie prenikanie do podstaty.

Počas prvého zdvihu – etapy *zovšeobecňovania* sa vo vedomí človeka začnú vzájomne prepájať najprv od seba oddelené izolované modely, až dôjde k vytvoreniu tzv. *generického modelu*. Toto zovšeobecnenie môže trvať aj krátko. Zatiaľ čo izolovaný model predstavuje konkrétny prípad budúcej znalosti (Hejný, 2014, str. 47), generický model už vystupuje ako prototyp všetkých alebo určitej skupiny izolovaných modelov, zastupuje ich už v ďalšom poznávacom procese.

---

[5] Tabuľka sa líši od pôvodnej a viackrát publikovanej tabuľky poznávacieho procesu. Sám profesor Hejný uvádza, že je možné, že sa len preukáže vhodnosť a užitočnosť takejto úpravy. (Hejný, 2014, str. 43)

[6] Pod pojmom primeraná úloha Hejný rozumie „úloha je tak ľahká, že ju žiak vyrieši, a zároveň tak náročná, aby mal z jej vyriešenia radosť“ (voľný preklad, Hejný, 2014, str. 44).

[7] V (Hejný, Novotná, Stehlíková, 2004) bol ešte použitý pojem separovaný model.

[8] Veľký význam majú v tejto hladine aj nasledujúce typy modelov. Prekvapivý model je taký, ktorý sa tvári, že nie je modelom pre daný matematický objekt, ale v skutočnosti modelom je, alebo taký, o ktorého existencii dieťa nevedelo. Príkladom môže byť nekonvexný štvoruholník ako model pre štvoruholník. Zdanlivým modelom môže byť niečo, čo v skutočnosti nie je modelom daného objektu, ale môže sa tak zdať. Príkladom môže byť štvorec „postavený“ na vrchole[8] ako model pre kosoštvorec. Nie-modelom môže byť jav alebo objekt, ktorý vysvetľuje komplementárnu vlastnosť skúmaného javu (objektu). Pre zavedenie pojmu konvexný útvar uvádza Hejný, že je vhodné ukázať útvar, ktorý nie je konvexný.

Zdvih 2 – *abstrakčný zdvih* predstavuje vytvorenie abstraktného poznania. Súbor izolovaných a generických modelov je reštrukturovaný a vzniká poznatok abstraktného charakteru.

Počas hladiny *kryštalizácie* sa nové poznanie prepája s predchádzajúcimi vedomosťami. Obyčajne to prebieha dlhodobo. Kryštalizácia poznatku začína pri prvom generickom modeli, ale môže vzniknúť už aj pri izolovanom modeli (kryštalizácia teda prebieha v podstate počas celého poznávacieho procesu).

3 Jednotky dĺžky, obsahu a objemu

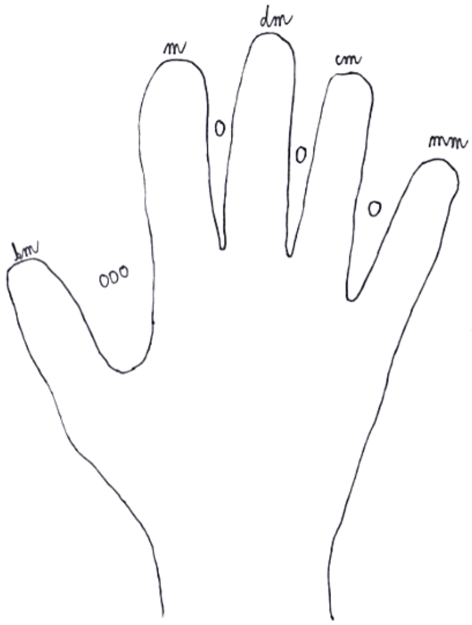
Táto kapitola je venovaná problematike jednotiek dĺžky, obsahu a objemu v školskej matematike. Zameriava sa na využitie rôznych modelov pre budovanie predstáv jednotlivých jednotiek v snahe vyhnúť sa formalizmu, ktorý je v tejto problematike veľmi silno zastúpený. Dôležitou časťou je aj premena jednotiek. Ako motiváciu by som uviedla tri príbehy, v ktorých vystupujú jednotky dĺžky a hustoty:

PRÍBEH 1: Chlapec – prvák na základnej škole, išiel pešo so svojou mamou na vlak. Cesta sa mu zdala dlhá, preto sa spýtal: „Ako ešte dlho?“ Mama odpovedala: „Asi ešte kilometer.“ Ďalšie myšlienky chlapca boli nasledujúce: „Kilometer... Môj krok má asi 50 centimetrov. Do jedného metra sa tak zmestia dva kroky. A tých metrov je v kilometri tisíc... Takže je to 2000 krokov, to sa dá.“ Neskôr, v 5. ročníku nevedel tento chlapec premeniť v domácej úlohe z matematiky centimetre na milimetre a decimetre.

PRÍBEH 2: Praktikantka na pedagogickej praxi z fyziky premieňala so žiakmi 8. ročníka hustotu medi. Na tabuli bolo napísané:
8960 kg.m-3 = 8,96 g.cm-3
Jedna žiačka sa prihlásila a povedala, že je to zle. Na otázku, prečo si to myslí, odpovedala: „Keď ideme z väčšej jednotky na menšiu, nemôžeme tam mať predsa menšie číslo.“

PRÍBEH 3:Tínedžeri sa po vyučovaní v zime stretli pri škole a postávali pod šikmou strechou školy. V ten deň bol odmäk a zo striech padali kusy zmrznutého snehu. Chlapci sa smiali, odskakovali, kým sa na jedného nezosypal veľký kus. Chlapec spadol, všetci boli prekvapení ako mu taký „kúsok snehu“ mohol ublížiť.

V období 2015-2019 sa vyskytlo v testovaní T9 z matematiky osem úloh, v ktorých bolo nevyhnutné premeniť jednotky dĺžky, obsahu či objemu. Všetky tieto úlohy boli zaradené medzi obťažné alebo stredne obťažné (Csachová, Jurečková, Tkačik, 2021), napriek tomu, že problematika jednotiek a ich premeny nie je ani nová, a na hodinách matematiky sa jej venuje dosť času. Prečo ale žiaci nevedia pracovať s rôznymi jednotkami? Kde sa stala vo všetkých troch príbehoch chyba? Zlyhali učitelia, ktorí jednotky „poriadne“ nenaučili alebo žiaci, ktorí sa to nenaučili? Je možné, že vo všetkých prípadoch zaužívaný formalizmus vo vzdelávaní ovplyvnil pochopenie problematiky.



Obr. 2 „Ručička“ – pomôcka pre premenu jednotiek dĺžky (zdroj: vlastný, obrázok žiaka 3. ročníka)

Zavedenie jednotiek dĺžky a ich premena je súčasťou IŠVP z matematiky už v rámci primárneho vzdelávania. V 1. a 2. ročníku sa zavádzajú jednotky dĺžky milimeter, centimeter, decimeter, meter a meranie dĺžky v týchto jednotkách. Premena jednotiek dĺžky v rozsahu od kilometrov po milimetre sa začína v 3. ročníku a kvôli úspešnosti žiakov a dobrým skúsenostiam učitelia zavádzajú pomôcku – Obr. 2.[9] Používanie tejto pomôcky pretrváva aj na 2. stupni základnej školy. Mnoho učiteľov z praxe mi povedalo, že bez nej by ich žiaci premieňať jednotky (asi) ani nevedeli. Myslím si, že problémom nie je ani použitie tejto „pomôcky“, ako to, že jej zavedeniu nepredchádza vybudovanie správnej predstavy jednotlivých jednotiek, ich násobkov a dielov. Žiaci nemajú skúsenosti s dostatočným počtom izolovaných modelov, nevedia si predstaviť 10 centimetrov či 1 meter. Potom sa premieňanie jednotiek tak potrebné pre reálny život mení na formálne používanie pomôcky.

V rámci nižšieho stredného vzdelávania sa ďalej v matematike zavádzajú jednotky obsahu a objemu, prehľad spolu aj so štandardami z primárneho vzdelávania je uvedený v Tab. 4. Všetky jednotky

[9] Opis postupu premieňania jednotiek s „ručičkou“ podľa postupov z internetu: Ruku majú deti stále so sebou, preto ju môžu využiť ako pomôcku pri premene jednotiek dĺžky. Medzi jednotlivými prstami urobíme jeden skok, ktorý sa rovná jednej nule. Medzi ukazovákom a palcom je veľká vzdialenosť, musíme urobiť až tri skoky = tri nuly. Smerom k malíčku pridávame toľko núl, koľko skokov urobíme (malíček je malý, potrebuje pridať). Smerom k palcu odoberieme toľko núl, koľko skokov urobíme (palec je veľký, musíme mu odobrať). Napríklad: 4 m = 4 + 0 + 0 cm = 400 cm, 5000 m = 5 – 0 – 0 – 0 m = 5 m. (Z tohto postupu je jasný formalizmus.)

požadované v IŠVP patria buď k základným (m) a odvodeným (m^2, m^3) jednotkám SI[10], vedľajším jednotkám (l, ha, a), ich násobkom a dielom. Stále sa to ale týka jednotiek dĺžky, obsahu a objemu. Jednotky času, hmotnosti, rýchlosti a ďalšie jednotky nie sú uvedené v IŠVP pre matematiku na úrovni nižšieho stredného vzdelávania, ale sú zaradené v IŠVP pre fyziku – Tab. 5.

Jednotky rôznych veličín a ich premenu je nevyhnutné chápať interdisciplinárne, ako požiadavku na vedomosti a zručnosti žiakov z oblasti Človek a príroda. K obsahovým štandardom prvého roka štúdia (obyčajne je to v 6. ročníku základnej školy) predmetu Fyzika môžeme nájsť jednotky hmotnosti (g, kg, t), dĺžky (mm, cm, dm, m, km), objemu (ml, l, cm^3, dm^3, m^3), hustoty (g/cm^3). V druhom roku (7. ročník) sú to jednotky času (s, min, h), v treťom (8. ročník) jednotky rýchlosti (m/s, km/h). Pri ďalších fyzikálnych jednotkách (jednotky tlaku, práce, výkonu, energie polohovej a pohybovej, elektrického prúdu, napätia a odporu, elektrickej práce a elektrického príkonu) sa využívajú ich násobky a diely. (IŠVP pre fyziku, nižšie stredné vzdelávanie)

Ročník / stupeň	*Očakávaný obsahový a výkonový štandard*
1. stupeň ZŠ	premeniť jednotky dĺžky (mm, cm, dm, m, km) (IŠVP, primárne, str. 22).
5. ročník ZŠ	pracovať na propedeutike jednotiek obsahu (cm^2, mm^2) v štvorcovej sieti a jednotiek objemu (mm^3, cm^3, dm^3, m^3) (IŠVP, 2. stupeň, str. 7)
6. ročník ZŠ	premeniť základné jednotky obsahu s využívaním vlastností desatinných čísel, premena jednotky obsahu: hektár, ár, kilometer štvorcový, meter štvorcový, decimeter štvorcový, centimeter štvorcový a milimeter štvorcový (ha, a, km^2, m^2, dm^2, cm^2, mm^2) (IŠVP, 2. stupeň, str. 13)
7. ročník ZŠ	poznať vzťah 1 liter = 1dm^3, premeniť základné jednotky objemu, vypočítať povrch a objem kvádra a kocky, ak žiak pozná dĺžky ich hrán, vyriešiť primerané slovné úlohy na výpočet povrchu / objemu kvádra a kocky aj s využitím premeny jednotiek obsahu / objemu jednotky objemu: meter kubický, decimeter kubický, centimeter kubický, milimeter kubický, kilometer kubický, liter, deciliter, centiliter, mililiter, hektoliter (m^3, dm^3, cm^3, mm^3, km^3, l, dl, cl, ml, hl)“ (IŠVP, 2. stupeň, str. 21)

Tab. 4 Prehľad obsahových a výkonových štandardov zameraných na jednotky dĺžky, obsahu a objemu podľa IŠVP pre matematiku (zdroj: upravené podľa IŠVP pre matematiku, nižšie stredné vzdelávanie)

[10] Pod skratkou SI vystupuje Medzinárodná sústava jednotiek (z fr. ***S****ystème* ***I****nternational (d'Unités)*), v ktorej sú najpoužívanejšie fyzikálne jednotky. Patria tam *základné* jednotky (meter, sekunda, kilogram, ampér, mol, kelvin, kandela), *odvodené* jednotky (napríklad meter štvorcový, meter kubický, kilogram na meter kubický, meter za sekundu) a ich *násobky* a *diely* (vytvorené pomocou predpôn: quetta, ronna, yotta, zetta, exa, peta, tera, giga, mega, kilo, hekto, deka, deci, centi, mili, mikro, nano, piko, femto, atto, zepto, yokto, ronto, quecto; https://sk.wikipedia.org/wiki/SI). V prírodných vedách pre ISCED 1, 2, 3 sa používajú len niektoré z týchto predpôn.

Počas primárneho i sekundárneho vzdelávania sa tak žiak stretne s veľkým množstvom jednotiek, a je potrebné mať vybudovanú predstavu pre nich, aby bol poznatok trvalý, nie formálny[11] a užitočný. Pomocou nasledujúcich aktivít je možné vytvoriť predstavu jednotiek dĺžky, obsahu a objemu.[12]

Ročník	*Veličiny a ich jednotky požadované pre jednotlivé ročníky*
6. ročník ZŠ	objem, značka V, jednotky objemu ml, l hmotnosť, značka m, jednotky hmotnosti g, kg, t dĺžka, značka d, jednotky dĺžky mm, cm, dm, m, km objem tuhých telies, jednotky objemu cm^3 , dm^3 , m^3 (IŠVP pre fyziku, nižšie stredné vzdelávanie, str. 4) hustota, značka ρ, jednotka hustoty g/cm^3 , vzťah $\rho = m / V$ (IŠVP pre fyziku, nižšie stredné vzdelávanie, str. 5)
7. ročník ZŠ	čas, značka t, jednotky času s, min, h (IŠVP pre fyziku, nižšie stredné vzdelávanie, str. 6) teplo, značka Q, jednotka tepla J, vzťah $Q = c \cdot m \cdot \Delta t$ (IŠVP pre fyziku, nižšie stredné vzdelávanie, str. 7)
8. ročník ZŠ	sila, značka F, jednotka sily N tlak, značka p, jednotky tlaku Pa, hPa, kPa, MPa, vzťah $p = F / S$ výkon, značka P, jednotky výkonu W, kW, MW (IŠVP pre fyziku, nižšie stredné vzdelávanie, str. 9)
9. ročník ZŠ	elektrický prúd, značka I, jednotky elektrického prúdu A, mA, μA elektrické napätie, značka U, jednotky elektrického napätia V, kV elektrický odpor vodiča, značka R, jednotky elektrického odporu Ω, kΩ, MΩ elektrická práca, značka W, jednotky elektrickej práce J, kWh elektrický príkon, značka P, jednotky elektrického príkonu W, kW, MW MW (IŠVP pre fyziku, nižšie stredné vzdelávanie, str. 11)

Tab. 5 Prehľad fyzikálnych veličín, ich jednotiek, násobkov a dielov uvedených v obsahových a výkonových štandardov v IŠVP pre fyziku (zdroj: upravené podľa IŠVP pre fyziku, nižšie stredné vzdelávanie)

[11] Pod trvalým, ale formálnym poznatkom rozumiem, keď napríklad žiak aj na strednej škole vie, že pri premene kilometrov na metre musí „pridať tri nuly“, čo „funguje“ pri premene celočíselných hodnôt (3 km = 3 000 m), ale nie pri premene desatinných (3,24 km = 3 240 m – „bola pridaná len jedna nula“).

[12] Motiváciou bol pre mňa príspevok Moniky Janičovej o práci s nadanými žiakmi (Janičová, 2020) počas konferencie Dva dni s didaktikou matematiky v roku 2020.

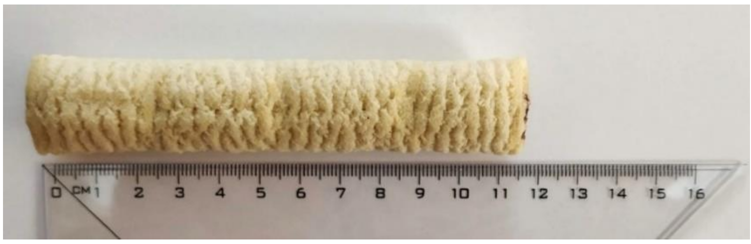
Aktivita: **Dĺžka predmetu**

Etapa poznávacieho procesu: izolované modely

Cieľ: vytvoriť si predstavu dĺžky určitej hodnoty

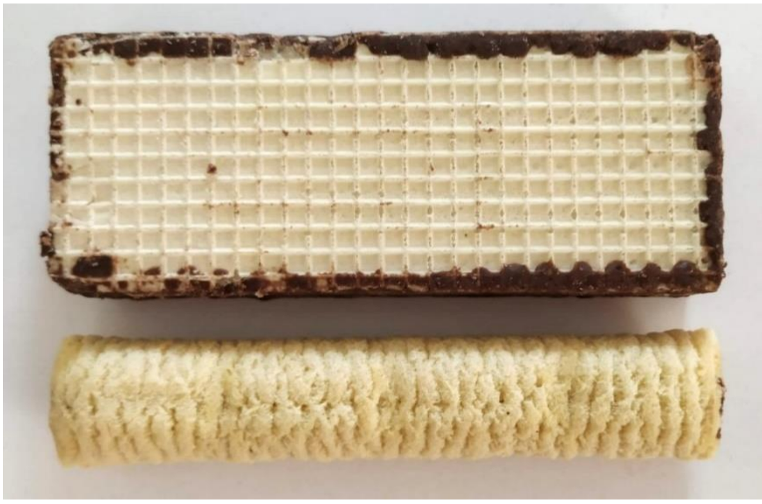
Pomôcky: sušienky, pero, ceruzka, hranatý perečník, preukaz (do knižnice, občiansky, ...), ... (čokoľvek, s čím má žiak skúsenosti, alebo to má k dispozícii, niečo, čo má žiak rád), pravítko

Úloha 1: Odmerajte rozmery predmetu v centimetroch. (Obr. 3) Premeňte ich na milimetre, decimetre, metre.



Obr. 3 Dĺžka obľúbenej detskej trubičky (približne 11,5 cm, zdroj: vlastný)

Úloha 2: Porovnajte rozmery viacerých predmetov.[13] (Obr. 4)



Obr. 4 Dĺžka trubičky a dĺžka napolitánky sú približne rovnaké (trubička 11,5 cm, napolitánka 11 cm, zdroj: vlastný)

Úloha 3: Nájdite vo svojom okolí predmet, ktorého niektorý z rozmerov má 10 cm (15 cm, 20 cm, ..., prípadne jeden z rozmerov papiera A4).

[13] Túto úlohu „riešia“ žiaci bežne na hodinách telesnej výchovy, keď sa zoraďujú podľa výšky.

Dĺžka vhodná na zapamätanie a vytvorenie si predstavy	*Reálna situácia*
210 mm, 297 mm	dĺžka strán papiera A4
25 cm	dĺžka chodidla veľkosti 38
telesná výška v stoji (dospelý človek)	rozpätie paží v stoji[14] (dospelý človek)
10 – 30 μm	rozmery väčšiny buniek
6378 km	polomer Zeme
313 km	vzdialenosť Bratislava – Košice (vzdušnou cestou)
451 km	vzdialenosť Bratislava – Košice (cez Žilinu, podľa GoogleMaps)
384 403 km	vzdialenosť Zem – Mesiac
147 097 000 km (perihélium) 152 099 000 km (afélium).	vzdialenosť Zem – Slnko (mení sa)
9 460 730 472 580 800 m	svetelný rok[15] (ako jednotka dĺžky)

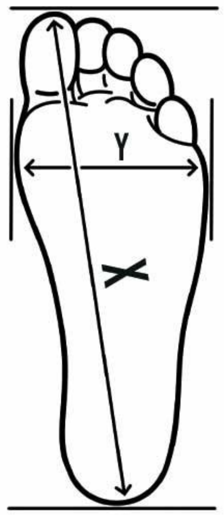
Tab. 6 Niektoré zo známych „dĺžok“, s ktorými sa môžu stretnúť žiaci na 2. stupni ZŠ (zdroj: vlastný, hodnoty prevzaté z rôznych stránok)[16]

[14] Podľa výskumu z (Sedmak, Hitka, Rosak, 2007) bola priemerná výška slovenských žien 168,9 cm a priemerné rozpätie paží v stoji 165.3 cm. Je to síce len približná rovnosť, ale môže byť pri odhadoch veľmi užitočná.

[15] Svetelný rok je definovaný ako dráha, ktorú prejde svetlo vo vákuu za 1 juliánsky rok.

[16] K ďalším zaujímavým „dĺžkam“ je možné pripojiť napríklad normálny rozchod koľajníc (šírka 1 435 mm) pre železničné trate na Slovensku a pre úzky rozchod (1 000 mm) tatranských elektrických železníc a bratislavských električkových tratí. (https://sk.wikipedia.org/wiki/Rozchod_ko%C4%BEaje)

Pri riešení týchto troch úloh sa vykonávajú tri činnosti: meranie dĺžky[17], porovnávanie dĺžky, „hľadanie“ určitej dĺžky. Takto si žiak môže prácou s dostatočným počtom izolovaných modelov vytvoriť predstavu jednotiek dĺžky. Nemusí to byť presne 1 cm, 1 dm alebo 1 m, môže to byť aj nejaký vhodný násobok, ktorý je ale možné použiť na vybudovanie predstavy. (Na Obr. 3 je znázornená trubička s dĺžkou 11,5 cm, pričom nie je až tak dôležité, či je to 10 cm alebo 11,5 cm, ale to, či si viem predstaviť približne ten 1 dm a túto predstavu využiť pri odhade.) To je možné využiť aj pri rôznych vzdialenostiach ako sú uvedené v Tab. 6.



EUR	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
UK	3	4	5	6	6,5	7	8	9	10	11	12	13
US-MEN	4	5	6	7	7,5	8	9	10	11	12	13	14
X (cm)	24	24,52	25,10	25,51	26,08	26,52	27,06	27,53	28,48	29	29,52	30,46
Y (cm)	8,50	8,81	8,90	9,03	9,30	9,40	9,52	9,70	9,91	10,00	10,20	10,41

Obr. 5 Používaná veľkosť obuvi pre Európu, Veľkú Britániu a USA a príslušná dĺžka a šírka chodidla (zdroj: https://www.steel-obuv.sk/velkost)

Aktivita: **Dĺžka kroku**

Etapa poznávacieho procesu: izolované modely

Cieľ: vytvoriť si predstavu o dĺžke svojho kroku

Pomôcky: krajčírsky meter, meracie pásmo

Úloha: Určte približne dĺžku svojho kroku.

Dĺžku kroku je možné určiť pomocou odmerania vzdialenosti, ktorú prejde tým jedným krokom, alebo sa „odkrokuje“ známa vzdialenosť a jej dĺžka sa vydelí počtom vykonaných krokov. Dĺžku kroku je možné určiť aj na základe výšky postavy človeka. Odhad je orientačný a opiera sa o predpoklad, že dĺžka kroku človeka predstavuje približne 42 % výšky človeka – Tab. 7.

[17] Pod meraním sa rozumie zisťovanie koľkokrát sa jednotka dĺžky nachádza v meranej dĺžke. (Napríklad ak má niečo dĺžku 13 cm, tak sa v tej dĺžke jednotka 1 centimeter nachádza 13-krát. Ak je to napríklad 14,5 cm, tak sa tam nachádza jednotka 1 centimeter 14 a pol krát.)

výška	*dĺžka kroku*	*výška*	*dĺžka kroku*	*výška*	*dĺžka kroku*	*výška*	*dĺžka kroku*	*výška*	*dĺžka kroku*
150	63	160	68	170	71	180	76	190	80
151	63	161	68	171	72	181	76	191	80
152	64	162	68	172	72	182	76	192	81
153	64	163	68	173	73	183	77	193	81
154	65	164	69	174	73	184	77	194	81
155	65	165	69	175	74	185	78	195	82
156	66	166	70	176	74	186	78	196	82
157	66	167	70	177	74	187	79	197	83
158	67	168	71	178	75	188	79	198	83
159	67	169	71	179	75	189	79	199	84

Tab. 7 Priemerná dĺžka kroku podľa výšky postavy človeka (zdroj: https://www.desettisickroku.cz/o-chuzi/1/jak-zmerit-svuj-krok)

Pre odvodené jednotky obsahu a objemu je možné postupovať podobne ako pri predchádzajúcich aktivitách (ako nasledujúca aktivita), ale aj na základe už vytvorených predstáv o jednotkách dĺžky – Tab. 8.

Aktivita: **Obsah sušienky (papiera, ...)**

Etapa poznávacieho procesu: izolované modely

Cieľ: vytvoriť si predstavu o obsahu známeho predmetu

Pomôcky: sušienka (akýkoľvek známy vhodný predmet), krajčírsky meter, meracie pásmo, pravítko, ...

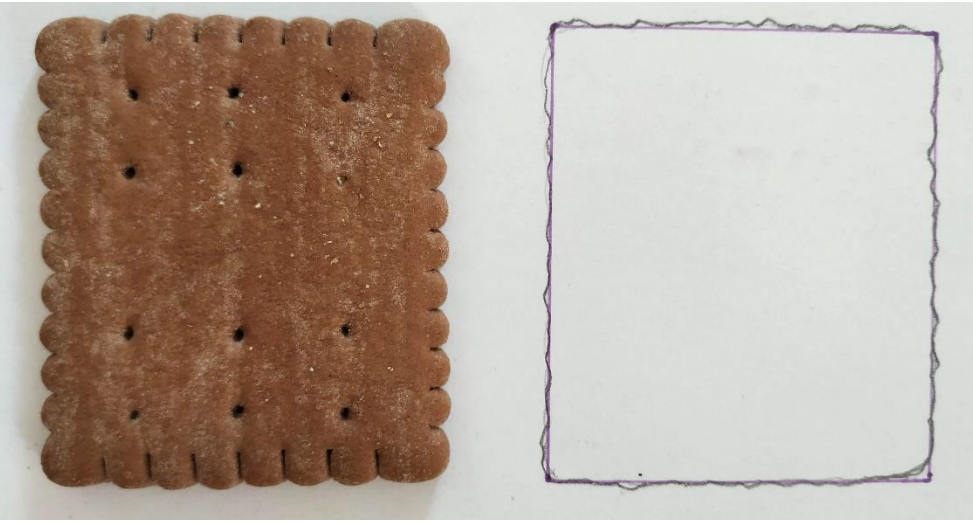
Úloha 1: Určte obsah sušienky (alebo nejakého vhodného predmetu, ktorý je k dispozícii).

Úloha 2: Nájdite predmet, ktorého niektorá zo stien má obsah 10 cm^2 (20 cm^2, 50 cm^2, 1 dm^2, ...).

Úloha 3: Narysujte štvorec, trojuholník, obdĺžnik s obsahom 1 cm^2 (5 cm^2, 20 cm^2, ...).

Úloha 4: Vymerajte časť chodníka s obsahom 10 m^2 (0,001 km^2, 0,2 á, ...).

Žiak si zvolí predmet, ktorý je k dispozícii. Vhodným predmetom je taký, ktorý je mnohostenom, teda taký, ktorý má mnohouholníkové steny. Z nich si vyberie niektorú (v tvare štvorca, obdĺžnika, rovnobežníka, trojuholníka, ...), odmeria jej rozmery a pomocou vzorca pre výpočet obsahu príslušného mnohouholníka určí obsah. (Prípadne je možné stenu predmetu prekresliť na papier a pomocou štvorcovej siete určiť obsah.) Aj v ostatných úlohách ide o vybudovanie predstavy určitého obsahu.



Obr. 6 Sušienka a obdĺžnik, ktorý „pripomína" sušienku[18] s obsahom 35,75 cm^2 (rozmery približne 5,5 cm × 6,5 cm, zdroj: vlastný)

Jednotka	*Predstava*	*Jednotka*	*Predstava*
1 cm^2	obsah štvorca so stranou dĺžky 1 cm	1 cm^3	objem kocky s dĺžkou hrany 1 cm
1 m^2	obsah štvorca so stranou dĺžky 1 m	1 m^3	objem kocky s dĺžkou hrany 1 m
1 mm^2	obsah štvorca so stranou dĺžky 1 mm	1 mm^3	objem kocky s dĺžkou hrany 1 mm
1 dm^2	obsah štvorca so stranou dĺžky 1 dm	1 dm^3	objem kocky s dĺžkou hrany 1 dm
1 km^2	obsah štvorca so stranou dĺžky 1 km	1 km^3	objem kocky s dĺžkou hrany 1 km
1 á (ár)	obsah štvorca so stranou dĺžky 10 m, teda je to 100 m^2	1 l	objem kocky s dĺžkou hrany 1 dm
1 ha (hektár)	obsah štvorca so stranou dĺžky 100 m, teda je to 10 000 m^2	1 dl (deciliter)	desatina objemu kocky s dĺžkou hrany 1 dm

Tab. 8 Jednotlivé jednotky obsahu a objemu a možná predstava s nimi spojená (zdroj: vlastný)

[18] Sušienku som obkreslila ceruzkou a nerovné čiary som nahradila úsečkami.

Aktivita: **Obsah (plocha) papiera formátu A4, A3, ...**

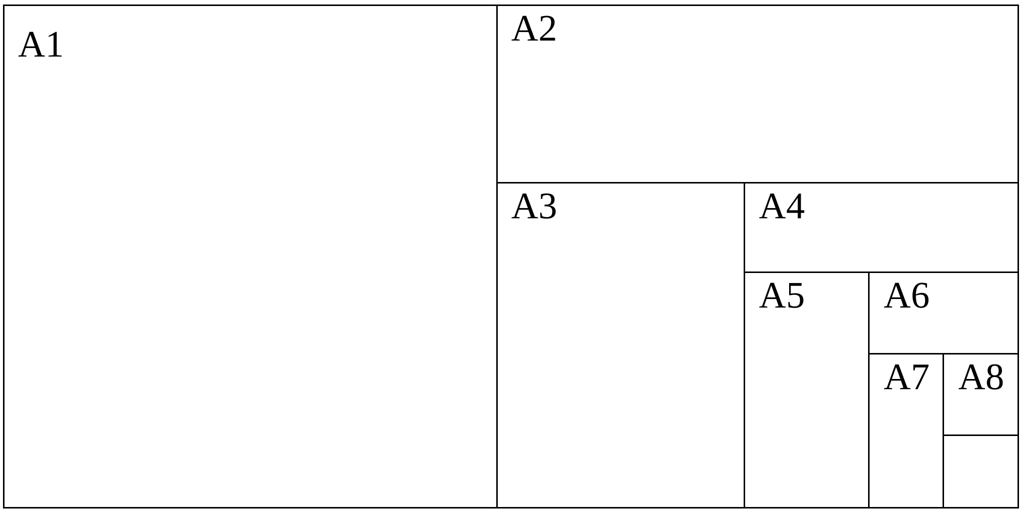
Etapa poznávacieho procesu: izolované modely

Cieľ: vytvoriť si predstavu o obsahu známeho predmetu

Pomôcky: –

Úloha: Určte plochu papiera formátu A4 (A3) v centimetroch štvorcových (v dm^2, m^2), ak viete, že papier A0 má plochu 1 m^2.

Plochu papiera formátu A4 je možné vypočítať pomocou vzorca $S = a \cdot b$, kde a, b sú rozmery papiera. Takže S = 210 mm · 297 mm = 62 370 mm^2 = 623,7 cm^2 = 6,237 dm^2 = 0,06237 dm^2. Ďalšou možnosťou je určiť, akú časť z A0 predstavuje papier A4 – Obr. 7. Je to jedna šestnástina z A0, teda plocha papiera A4 je $S = \frac{1}{16}$ m^2 = 0,0625 m^2. (Rozdiel v plochách je daný rozstrihnutím papiera.)



Obr. 7 Papier formátu A0 rozdelený na ďalšie formáty: A1 – A8[19] (zdroj: vlastný)

Aktivita: **Objem napolitánky (známeho objektu)**

Etapa poznávacieho procesu: izolované modely

Cieľ: určiť objem napolitánky (známeho predmetu) v tvare kvádra

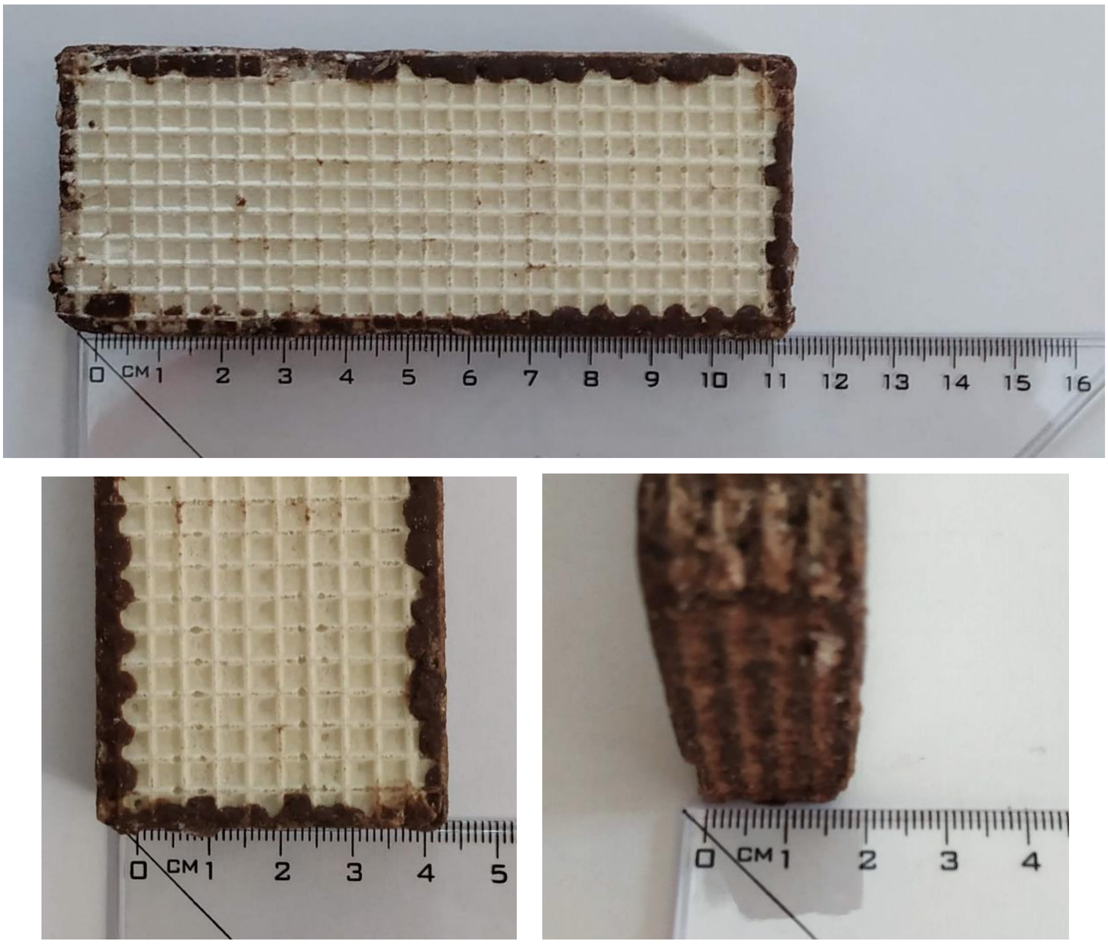
Pomôcky: napolitánka (známy predmet), meradlo

Úloha: Určte objem napolitánky v cm^3 a dm^3. (Alebo akéhokoľvek vhodného predmetu.)

Žiaci si zvolia vhodný predmet a odmerajú jeho rozmery. Najvhodnejší bude predmet v tvare kocky alebo kvádra (môže byť ale aj valec alebo ihlan). Potom pomocou vzorca $V = a \cdot a \cdot a = a^3$ (a – dĺžka

[19] Podľa normy STN EN ISO 216 má rad A dĺžky strán v pomere 1:√2 (teda približne 1:1,4142) zaokrúhlené na milimetre. Základný formát je označený ako A0 a jeho plocha je 1 m^2. Ďalšie formáty (A1, A2, A3, …) vzniknú postupným delením daného formátu na polovicu kolmo na dlhšiu stranu. (https://sk.wikipedia.org/wiki/Form%C3%A1t_papiera)

hrany kocky) alebo $V = a \cdot b \cdot c$ (a, b, c – dĺžky hrán kvádra) sa určí objem telesa. V prípade napolitánky na Obr. 8 to je $V = 11\ \text{cm} \cdot 4\ \text{cm} \cdot 1{,}5\ \text{cm} = 44\ \text{cm}^3 = 0{,}044\ \text{dm}^3$.



Obr. 8 Meranie dĺžky, šírky a výšky napolitánky ($d \times š \times v$ = 11 cm × 4 cm × 1,5 cm, zdroj: vlastný)

Podobnú úlohu môžu žiaci riešiť, ak majú zistiť napríklad objem valcovej nádoby s chipsami, či krabičky v tvare pyramídy. Pritom využijú aj vzorce pre výpočet objemu jednotlivých telies.

Aktivita: **Objem miestnosti**

Etapa poznávacieho procesu: motivácia, kryštalizácia

Cieľ: odhadnúť rozmery miestnosti (v tvare kvádra), odmerať rozmery miestnosti pomocou rôznych meracích „prístrojov“ a následne vypočítať pomocou vzorca $V = a \cdot b \cdot c$ (a, b, c – rozmery miestnosti) jej objem, porovnať vypočítané hodnoty objemu

Pomôcky: papier formátu A4, meter, laserové meradlo, ...

Úloha: Určte objem miestnosti (učebne, detskej izby, ...):

a) ak nevstanete z miesta (teda odhadom),

b) ak môžete vstať (môžete niečo použiť, ale nie „oficiálne“ meradlo),

c) ak máte k dispozícii niekoľko papierov formátu A4,

d) ak máte k dispozícii napr. krajčírsky meter, meracie pásmo, laserové meradlo, ... (nejaké „oficiálne“ meradlo dĺžky).

V prvom prípade musí žiak určiť objem miestnosti čisto len na základe svojho odhadu rozmerov miestnosti, pričom sa môže oprieť napríklad o výšku známej miestnosti, alebo svoju výšku („Koľkokrát by som sa musel na seba postaviť tak, aby som sa „dotýkal“ stropu?“). V druhom prípade musí k riešeniu pristupovať tvorivo a vymyslieť, čo je možné použiť ako „neoficiálne“ meradlo. Jednou z možností je použiť ako meradlo jeden krok, a teda miestnosť „odkrokovať“ (a využiť poznatky o dĺžke svojho kroku), alebo „prikladaním“ jedného chodidla k druhému zistiť počet „chodidiel“ a vynásobiť to „priemernou“ dĺžkou chodidla – napríklad 25 cm – Obr. 5. Alebo je možné známu výšku niektorého zo spolužiakov modelovať pospájanými šnúrkami do topánok či šálom, prípadne rozpažením paží.[20] V treťom prípade je potrebné poznať rozmery papiera formátu A4, a to 210 mm a 297 mm. Vďaka týmto známym rozmerom môžeme jeden z rozmerov papiera použiť ako vhodné meradlo. (Merať dĺžku znamená zistiť, koľkokrát sa meradlo – vhodná jednotka nachádza v meranej dĺžke.) Štvrtý prípad úlohy je zrejmý, žiaci majú realizovať čo najpresnejšie meranie rozmerov miestnosti.[21]

Podobnú úlohu je možné sformulovať pre určenie rozmerov alebo plochy volejbalového ihriska či telocvične alebo dĺžky pretekárskej dráhy.

Aktivita: **Tvorba slovných úloh s premenou jednotiek**

Etapa poznávacieho procesu: kryštalizácia

Cieľ: vytvoriť slovnú úlohu, v ktorej je potrebné premeniť jednotky dĺžky, obsahu alebo objemu alebo slovnú úlohu, v ktorej vystupuje jednotka obsahu ár (hektár), upevniť predstavu o obsahu 1 ár (1 hektár)

Úloha 1: Vytvorte slovnú úlohu, v ktorej je nevyhnutné premeniť jednotky dĺžky (obsahu, objemu).

Úloha 2: Vytvorte slovnú úlohu, v ktorej vystupuje jednotka obsahu ár (hektár).

Tvorba úloh samotnými žiakmi (angl. *problem posing*) je veľmi užitočnou aktivitou, ktorú je vhodné zaraďovať do vzdelávacieho procesu. Žiak pri tvorbe úlohy nielenže rozvíja tvorivosť, ale preukazuje aj svoje pochopenie problematiky.

Príkladom slovnej úlohy, v ktorej je potrebné premeniť jednotky dĺžky, obsahu alebo objemu, môže byť úloha z testovania T9 (2019/13): „Škatuľka v tvare kvádra má rozmery 12 cm, 8 cm a 5 cm. Vypočítajte jej objem v litroch. Výsledok uveďte s presnosťou na dve desatinné miesta.“

---

[20] Samozrejme, že sa musí počítať aj s dielmi takýchto pomocných jednotiek dĺžky.

[21] Študenti Katka, Viki, Patrícia a Tomáš tak odhadli objem učebne na 70 m^3, pri použití dĺžky chodidla 80 m^3 a pri využití rozmerov A4 približne na 90 m^3.

Príkladom pre slovnú úlohu s jednotkou ár alebo hektár môže byť úloha pre plochu futbalového ihriska z (Kubáček, Černek, Žabka a kol., 2008, str. 43 – 44): „Hracia plocha musí mať tvar obdĺžnika. Dĺžka hracej plochy musí byť vždy väčšia ako šírka. Dĺžka hracej plochy nesmie byť väčšia ako 120 m a menšia ako 90 m; šírka nesmie byť väčšia ako 90 m a menšia ako 45 m. Medzinárodné stretnutia sa nesmú uskutočniť na hracej ploche, ktorej dĺžka je väčšia ako 110 m a menšia ako 100 m; šírka nesmie byť väčšia ako 75 m a menšia ako 64 m. Môže mať hracia plocha zodpovedajúca pravidlám futbalu plochu 48 árov?"

Pri objasnení, čo všetko sa skrýva v tejto téme, môžem vysvetliť, čo chápem pod jednotlivými skupinami poznatkov – Tab. 9.

Poznatky	
Objekty	jednotky dĺžky, obsahu, objemu; predpony pre diely a násobky jednotiek
Vzťahy	vzťahy medzi jednotkami dĺžky[22]; význam predpôn pre diely a násobky
Postupy	postupy pre meranie dĺžky, obsahu, objemu; postupy pre premenu jednotiek
Schémy	predstava jednotiek

Tab. 9 Skupiny poznatkov pre jednotky dĺžky, obsahu a objemu (zdroj: vlastný)

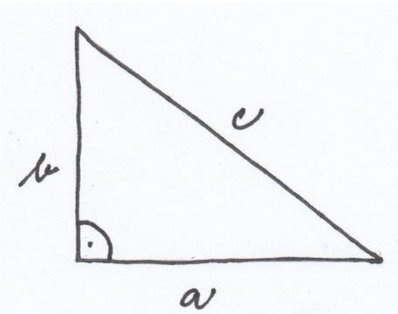
[22] Napríklad: 1 decimeter predstavuje 10 centimetrov, 1 milimeter je jedna tisícina metra, ...

4 Pytagorova veta

V matematike základnej (i strednej) školy sa väčšina matematických viet neuvádza vo forme viet, ale vzorcov. Medzi výnimky patrí Pytagorova veta.[23] Tá sa uvádza od začiatku ako „veta“ a popisuje vzťah, ktorý platí medzi dĺžkami strán v pravouhlom trojuholníku (resp. medzi ich druhými mocninami). Jej algebrická formulácia pre trojuholník *ABC* (Obr. 9) znie:

Ak a a b sú dĺžky odvesien pravouhlého trojuholníka a c je dĺžka jeho prepony, tak platí:

$a^2 + b^2 = c^2$.[24]



Obr. 9 Pravouhlý trojuholník *ABC* s odvesnami *a*, *b* a preponou *c* (zdroj: vlastný)

Známou a v školskej matematike aj často využívanou je geometrická formulácia Pytagorovej vety zobrazená na Obr. 10:

Obsah štvorca zostrojeného nad preponou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov zostrojených nad jeho odvesnami.[25]

Pri riešení úloh sa tiež používa obrátená Pytagorova veta:

Ak pre dĺžky strán a, b a c trojuholníka ABC platí vzťah $c^2 = a^2 + b^2$*, tak je tento trojuholník pravouhlý s odvesnami dĺžky a, b a preponou dĺžky c.*

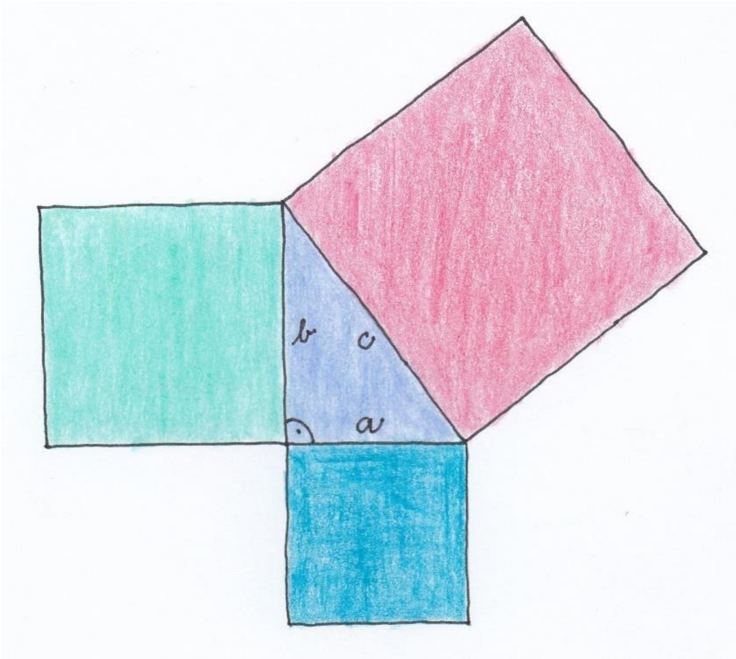
---

[23] K ďalším „vetám“ patria napríklad Talesova veta, Euklidove vety a Eulerova veta pre mnohosteny.

[24] Je dôležité si uvedomiť, že Pytagorova veta je formulovaná v tvare implikácie. Žiaci sa ju často naučia v „skrátenej“ forme: „$a^2 + b^2 = c^2$“. Bez určenia, čo *a, b, c* reálne predstavuje, je to ale len algebraický výraz. Napriek tomu táto „skrátená“ forma niektorým učiteľom postačuje. (Z vyjadrenia jednej matematikárky: „Zvykli sme si, že všetky pravouhlé trojuholníky označujeme *ABC*. Som rada, že to (Pytagorovu vetu) vedia aspoň pre trojuholník *ABC* s pravým uhlom pri *céčku*, a že „zarecitujú“ $a^2 + b^2 = c^2$.“).

[25] V českom preklade Euklidových Základov (Servít: Euklidove Základy, 1907, Kniha 1, str. 24) je Pytagorova veta obsahom tvrdenia XLVII a formulovaná nasledovne: *V pravouhlých trojuholníkoch sa štvorec na strane oproti uhlu pravému ležiaci rovná štvorcom na stranách pravý uhol zvierajúcich.* (preklad z češtiny a úprava autorka)

Takže ak dĺžky troch strán a, b, c trojuholníka spĺňajú rovnosť $c^2 = a^2 + b^2$ (a samozrejme aj trojuholníkovú nerovnosť), tak je to trojuholník pravouhlý, ak nie, tak trojuholník je ostrouhlý ($c^2 < a^2 + b^2$) alebo tupouhlý ($c^2 > a^2 + b^2$).[26]



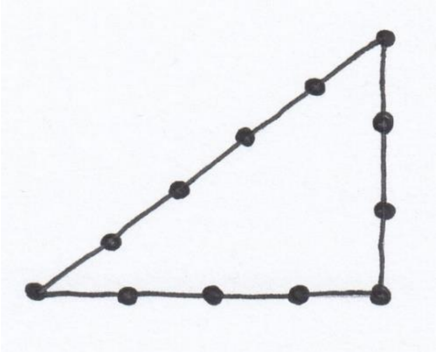
Obr. 10 Geometrická formulácia Pytagorovej vety (zdroj: vlastný)

Pytagorova veta je pomenovaná podľa starogréckeho matematika, politika a filozofa Pytagora zo Samosu (asi 580 – 500 p. n. l.)[27], ktorý ju možno ako prvý dokázal. Bola ale zrejme známa už viac ako 1000 rokov pred Pytagorom v Babylónii a Egypte. V týchto oblastiach na vymeriavanie pozemkov a základov rôznych stavieb používali tzv. napínači lán jednoduchú pomôcku na vytýčenie pravého uhla, tzv. meračský povraz. Na povraze vytvorili 13 rovnako od seba vzdialených uzlov. Prvý uzol spojili s posledným, trinástym, a povraz napli do tvaru obvodu pravouhlého trojuholníka so stranami 3, 4 a 5 dielov – Obr. 11.

---

[26] Toto tvrdenie vyplýva z kosínusovej vety $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ (kde a, b, c sú dĺžky strán trojuholníka, uhol γ je uhol oproti strane c), ktorú môžem upraviť na tvar $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Výraz v menovateli je vždy kladný (je to súčin dĺžok strán). Výraz v čitateli môže byť kladný (teda $a^2 + b^2 > c^2$), vtedy bude cos γ tiež kladný, uhol γ je z intervalu (0°, 90°) a trojuholník je ostrouhlý. Ak je výraz v čitateli záporný (teda $a^2 + b^2 < c^2$), cos γ je tiež záporný, uhol γ je tupý a trojuholník je tupouhlý.

[27] Všetko známe o živote Pytagora je dosť neisté. Pravdepodobne však navštívil Egypt, Babylon a Indiu a jeho pobyty mohli trvať aj niekoľko rokov. Je ale veľmi pravdepodobné, že ju poznali oveľa skôr aj iné staroveké civilizácie (Čína, Egypt). V meste Krotón na juhu Apeninského polostrova vytvoril Pytagoras spoločenstvo, ktorého členovia sú známi ako pytagorejci. (Bero, 1989)



Obr. 11 Napínanie povrazu (zdroj: vlastný)

Pytagorova veta

Výkonový štandard	**Obsahový štandard**
Žiak na konci 9. ročníka základnej školy vie / dokáže: ✓ vymenovať základné prvky a vlastnosti pravouhlého trojuholníka, ✓ formuláciu Pytagorovej vety aj jej význam, ✓ zapísať Pytagorovu vetu v pravouhlom trojuholníku *ABC* s pravým uhlom pri vrchole *C* vzťahom $c^2 = a^2 + b^2$, ale aj vzťahom pri inom označení strán pravouhlého trojuholníka, ✓ vyjadriť a zapísať zo základného vzťahu Pytagorovej vety obsah štvorca nad odvesnami ($a^2 = c^2 - b^2$, $b^2 = c^2 - a^2$), podobne aj pri inom označení strán trojuholníka, ✓ vyjadriť vzťah pre výpočet dĺžky odvesien pomocou odmocnín ($a = \sqrt{c^2 - b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$), podobne aj pri inom označení strán trojuholníka, ✓ vypočítať dĺžku tretej strany pravouhlého trojuholníka, ak sú známe dĺžky jeho dvoch zvyšných strán, ✓ samostatne použiť Pytagorovu vetu na riešenie kontextových úloh z reálneho praktického života.	pravouhlý trojuholník, základné prvky a vlastnosti pravouhlého trojuholníka – pravý uhol, odvesny, prepona, súčet dvoch ostrých uhlov je 90 stupňov Pytagorova veta pre pravouhlý trojuholník vzťahy $c^2 = a^2 + b^2$, $a^2 = c^2 - b^2$, $b^2 = c^2 - a^2$, $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, význam a využitie Pytagorovej vety vyjadrenie neznámej zo vzorca

Tab. 10 Výkonové a obsahové štandardy pre tému Pytagorova (IŠVP, nižšie stredné vzdelávanie, str. 33)

Podľa IŠVP je Pytagorova veta zaradená do 9. ročníka základnej školy, po téme o mocninách a odmocninách a pred lineárnymi rovnicami. Od žiaka sa z tejto témy vyžaduje, aby na konci 9. ročníka základnej školy vedel sformulovať Pytagorovu vetu geometricky, aj algebricky, a to nielen pre trojuholník *ABC*, ale aj pre iné označenie strán pravouhlého trojuholníka, a aplikoval ju pri riešení úloh týkajúcich sa trojuholníka, ale i úloh z reálneho života. (Presná formulácia obsahových a výkonových štandardov pre Pytagorovu vetu je v Tab. 10.) V rámci vyššieho stredného vzdelávania sa podľa IŠVP vyžaduje aj odvodenie Pytagorovej vety a zavádza sa kosínusová veta, ktorej špeciálnym prípadom je veta Pytagorova, a vety Euklidove v pravouhlom trojuholníku. Pre ich pochopenie je Pytagorova veta nevyhnutnou. Takisto sa Pytagorova veta používa v stereometrii základnej či strednej školy (napríklad pri výpočte dĺžky stenovej či telesovej uhlopriečky či bočnej hrany telesa).

V tejto téme sa prelína školská algebra, aritmetika i geometria. Pre správne vytvorenie poznatkov je z pohľadu geometrie nevyhnutné, aby žiak na začiatku vedel pracovať s pravouhlým trojuholníkom, rozlišoval pojmy odvesna a prepona pravouhlého trojuholníka, rozumel pojmu pravý uhol. Z pohľadu algebry má žiak rozumieť pojmu druhá mocnina a druhá odmocnina prirodzeného čísla, má vedieť pracovať s rovnicami (do určitej miery) a využiť úpravy pre výpočet hodnoty premenných a, b alebo c (dĺžky odvesien alebo prepony). Z pohľadu aritmetiky má žiak vytvoriť druhú mocninu pre prirodzené čísla a druhú odmocninu pre prirodzené číslo typu a^2 spamäti (napríklad do čísla 15^2), a pre ľubovoľné reálne číslo pomocou kalkulačky. Nedostatočná znalosť či úplná absencia ktoréhokoľvek poznatku z uvedených môže predstavovať riziko pre vytvorenie poznatkov týkajúcich sa Pytagorovej vety – Tab. 11.

Skupiny poznatkov pre tému Pytagorova veta	
Objekty	pravý uhol, pravouhlý trojuholník, odvesna, prepona, druhá mocnina (premennej, prirodzeného, racionálneho a iracionálneho čísla), druhá odmocnina (premennej, prirodzeného a racionálneho čísla), výraz, rovnica
Vzťahy	trojuholníková nerovnosť, veta o súčte veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku, vzťah $a^2 = a \cdot a$, vzorec na výpočet obsahu štvorca, samotné znenie Pytagorovej vety (môže byť v pozícii tvrdenia ale i vzorca[28])
Postupy	konštrukcia pravouhlého trojuholníka (ak sú zadané dĺžky oboch odvesien alebo jednej odvesny a prepony pravouhlého trojuholníka, pomocou troch bodov – vrcholov v štvorcovej sieti, ...), postup na výpočet obsahu štvorca pomocou vzorca, úprava vzorca $a^2 + b^2 = c^2$ na tvary $b^2 = c^2 - a^2$ (alebo $a^2 = c^2 - b^2$), $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ a $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ (alebo $b = \sqrt{c^2 - a^2}$)
Schémy	kombinácia geometrickej, algebraickej a aritmetickej schémy (geometrická schéma sa týka pravouhlých trojuholníkov, schopnosti nájsť „viditeľný“ i „skrytý“ pravouhlý trojuholník; algebraická schéma sa týka práce s premennými, ich druhými mocninami a odmocninami, úpravami rovníc; aritmetická schéma obsahuje predstavy o druhej mocnine a druhej odmocnine čísel)[29]

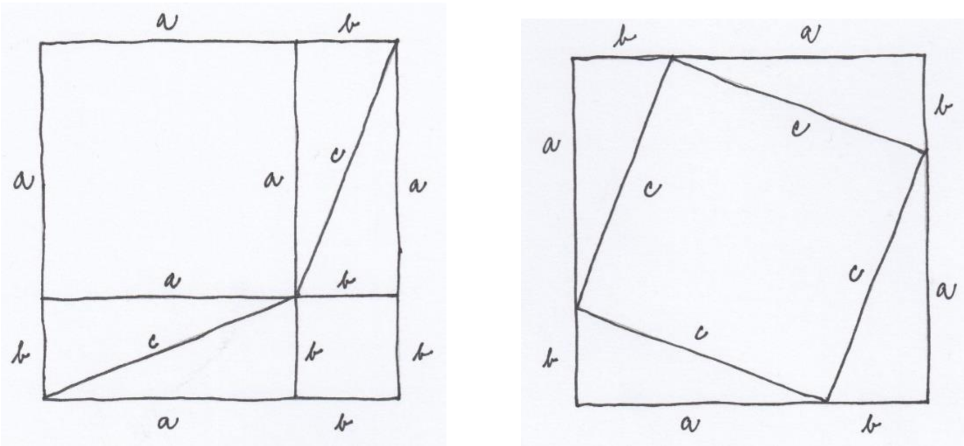
Tab. 11 Skupiny poznatkov pre Pytagorovu vetu (v tabuľke sú uvedené aj „vstupné“ poznatky pre tematický celok Pytagorova veta, zdroj: vlastný, s využitím práce (Ulrychová, 2011) a aj seminárnych prác študentiek rozširujúceho štúdia matematiky)

[28] Pytagorova veta ako tvrdenie predstavuje matematický výrok, o ktorom vieme rozhodnúť, či je pravdivý alebo nie. V pozícii vzorca predstavuje „pomôcku“ pre výpočet dĺžky niektorej zo strán pravouhlého trojuholníka alebo na overenie, či je trojuholník pravouhlý alebo nie.

[29] Jednotlivé schémy môžu byť u každého človeka iné.

Podľa viacerých zdrojov existuje viac ako 300 dôkazov Pytagorovej vety.[30] Pre pevnejšie vytvorenie poznatku je vhodné ukázať žiakom niektoré z nich, a tak zvyšovať aj potrebu a ich schopnosť argumentácie práve v geometrii. Uvádzam dva dôkazy, ktoré sú pochopiteľné aj pre žiakov na konci nižšieho stredného vzdelávania. Napriek tomu, že tieto dôkazy nemusia predstavovať „pre žiaka nástroj porozumenia myšlienke“ (Jirotková, Kloboučková, 2011), môžu pomôcť mu porozumieť prostrediu, v ktorom sa veta „odohráva“, a tak vytvoriť presnejšiu schému.[31]

Obr. 13



Zloženie štvorca so stranou $a + b$ dvoma rôznymi spôsobmi (zdroj: vlastný)

Prvý dôkaz je založený na tom, že štvorec so stranou $a + b$ je možné zložiť dvoma spôsobmi ako na Obr. 13. V prvom prípade (na obrázku vľavo) sú zložené štyri pravouhlé trojuholníky s odvesnami a, b a dva štvorce, jeden so stranou a a druhý so stranou b. V druhom prípade (na obrázku vpravo) sú zložené do štvorca štyri pravouhlé trojuholníky s odvesnami a, b a jeden štvorec so stranou c (čo predstavuje preponu pravouhlého trojuholníka). Obsah štvorca vyjadríme v oboch prípadoch ako súčty obsahov zložených útvarov:

$$a^2 + b^2 + 4 \cdot S_\Delta = c^2 + 4 \cdot S_\Delta$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \text{QED}$$

Druhý dôkaz je podobný a je založený na vyjadrení obsahu štvorca z predchádzajúceho obrázku vpravo dvoma spôsobmi, ktoré sa dajú do rovnosti:

$$S_1 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$S_2 = c^2 + 4 \cdot S_\Delta = c^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = c^2 + 2ab$$

[30] V (Loomis, 1968) sa uvádza, že existuje až 365 dôkazov.

[31] Pytagorova veta môže u žiakov vyvolávať mnohé otázky: „Čo je matematická veta? Prečo sa musí dokazovať? Kedy je možné ju obrátiť?“ (Klieme, Pauli, Reusser, 2009)

$$S_1 = S_2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{QED}$$

Aby sa mohol „realizovať“ poznávací proces týkajúci sa Pytagorovej vety, musia prejsť jeho jednotlivé etapy. Tento proces pritom nezačína až v 9. ročníku, do ktorého je táto téma zaradená, ale už v rámci primárneho vzdelávania, kedy sa žiaci zoznamujú napríklad s pojmami trojuholník a štvorec, či na začiatku nižšieho sekundárneho vzdelávania, kedy začínajú pracovať s pojmami uhol, pravý uhol a kolmosť priamok. Z vlastných pedagogických skúseností, z práce na publikácii (Csachová, Jurečková, Tkačik, 2021), i z rozhovorov s učiteľmi viem, že formálna znalosť Pytagorovej vety s nevytvorením si dostatočného množstva modelov môže viesť (a aj vedie) k obtiažam žiakov v tejto oblasti.

Neúspešnosť žiakov pri riešení úloh, v ktorých je potrebné použiť Pytagorovu vetu, je možné vysvetliť nasledujúcimi dôvodmi (Csachová, Jurečková, Tkačik, 2021):

- Žiak si pamätá „skrátenú“ algebrickú formu Pytagorovej vety, teda vzorec $a^2 + b^2 = c^2$, ale poznatok nevie aplikovať pre konkrétny prípad pravouhlého trojuholníka (aj keď je označený ako trojuholník *ABC* s odvesnami dĺžky *a, b* a preponou dĺžky *c*).
- Žiak si pamätá geometrickú formu Pytagorovej vety, ale nerozumie jej a nevie ju aplikovať pre konkrétny prípad trojuholníka. (Žiak vie Pytagorovu vetu ako „básničku“ bez pochopenia obsahu.)
- Žiak si nesprávne pamätá vzorec a v trojuholníku s dĺžkami odvesien *a, b* a prepony *c* namiesto vzťahu $a^2 + b^2 = c^2$ použije vzťah $a + b = c$.
- Žiak si neuvedomuje, že pravý uhol musí byť pri vrchole *C*, prípadne že trojuholník môže byť inak označený (napr. *KLM* či *PQR*) alebo v inej polohe (ako tej „klasickej“ – jedna odvesna rovnobežná s kratšou stranou zošita a druhá odvesna na ňu kolmá).
- Žiak si pamätá vzorec $a^2 + b^2 = c^2$, ale vypustí podmienku o pravom uhle, takže ju použije aj pre iný ako pravouhlý trojuholník (napríklad pri výpočte dĺžky tretej strany všeobecného trojuholníka).
- Žiak „nenájde“ „príslušný“ pravouhlý trojuholník potrebný k výpočtu v komplexnom obrázku.

To, že Pytagorova veta predstavuje v školskej matematike kritické miesto dokazujú aj rôzni autori z Českej republiky. Napríklad Jirotková a Klobоučková (2011) uvádzajú, že pri zavádzaní Pytagorovej vety do školskej matematiky je etapa izolovaných modelov veľmi krátka alebo úplne chýba. Generalizácia a etapa generických modelov sú potom vynechané, pretože je žiakom ponúknutý „hotový“ abstraktný poznatok – formulácia vety pre konkrétny pravouhlý trojuholník.

Najmä v oblasti geometrického prístupu je dôležité vytvoriť dostatočné množstvo modelov a celkový proces vytvárania tohto poznatku neskracovať kvôli zavedeniu až v 9. ročníku.

Teda je potrebné rešpektovať všetky etapy procesu nadobúdania poznatku a v priebehu procesu neprepočítavať len množstvo úloh, ale zaraďovať aj aktivity, ktoré pomôžu získať dostatok izolovaných modelov a vytvoriť preukážu porozumenie problematiky žiakmi. V nasledujúcom texte uvádzam niekoľko aktivít, ktoré boli poskytnuté študentmi rozširujúceho štúdia matematiky alebo sú prevzaté z rôznych zdrojov (prevažne z internetu) a študenti na nich reagovali pozitívne.

Aktivita: **Uhlopriečka**

Etapa poznávacieho procesu: motivácia, izolované modely[32]

Cieľ: odhaliť zadaný údaj (dĺžka uhlopriečky „obdĺžnika“) ako dĺžku najdlhšej strany pravouhlého trojuholníka (t.j. prepony), zistiť vzťah medzi jednotkami dĺžky palec a centimeter, „nájsť“ príslušný pravouhlý trojuholník

Úloha 1: Aké sú rozmery televízora, ak je jeho uhlopriečka 65-palcová? Zmestí sa nám na stenu, ak máme na nej miesto obdĺžnikového tvaru s rozmermi cca 90 cm a 70 cm?[33]

Úloha 2: Zmestí sa mi do tašky notebook s uhlopriečkou 15,6’’, ak predajca tašky uvádza informáciu, že taška je vhodná pre zošity a učebnice s rozmerom A4?

Riešenie tejto úlohy je založené na použití heuristických stratégií (pokus-omyl, odhad-overenie-oprava, ...). Cieľom nie je, aby žiaci zistili presné rozmery obdĺžnika, ale aby sa pokúsili zistiť ich.

Aktivita: **Pravouhlé trojuholníky**

Etapa poznávacieho procesu: motivácia, izolované modely

Cieľ: nakresliť pravouhlé trojuholníky do štvorcovej siete (izolované modely), zistiť dĺžky odvesien a prepony pravouhlých trojuholníkov

Pomôcky: štvorcová sieť, tabuľka (obidve v prílohe), pravítko

Úloha: Nakreslite čo najviac pravouhlých trojuholníkov do štvorcovej siete. Ich rozmery zapíšte do tabuľky – Tab. 12.

---

[32] Túto aktivitu je možné zaradiť kedykoľvek do témy Pytagorova veta.

[33] Palec je názov jednotky dĺžky používanej v USA a Spojenom kráľovstve. Tzv. anglický palec má značku ” a dĺžku 2,54 cm. Uhlopriečka tohto televízora má teda dĺžku 165,1 cm.

Štvorcová sieť s pravouhlými trojuholníkmi a tabuľka s dĺžkami strán týchto trojuholníkov predstavujú množinu izolovaných modelov.

Dĺžka odvesny 1	*Dĺžka odvesny 2*	*Dĺžka prepony*

Tab. 12 Tabuľka pre dĺžky odvesien a prepony pravouhlých trojuholníkov (zdroj: vlastný)

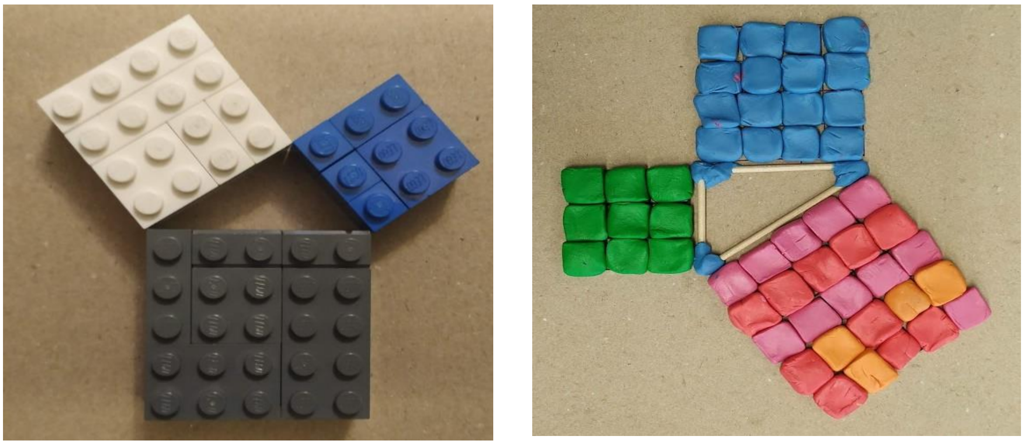
Aktivita: **Modelovanie Pytagorovej vety**

Etapa poznávacieho procesu: izolované modely, generický model, kryštalizácia

Cieľ: pomocou lega (plastelíny, látky, lentiliek, ...) vymodelovať geometrickú formuláciu Pytagorovej vety

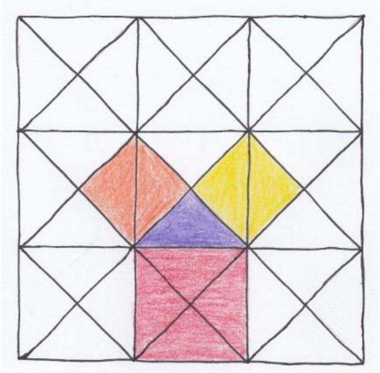
Pomôcky: lego, plastelína, špajle, lentilky, štvorcová sieť

Úloha: Znázornite Pytagorovu vetu pomocou nejakých pomôcok.



Obr. 14 Modelovanie Pytagorovej vety pomocou lega a plastelíny (zdroj: vlastný, práca žiaka 7. ročníka a študentiek rozširujúceho štúdia matematiky[34])

[34] Ďakujem Laure R., Petre T., Anne B., Silvii V. a Lenke Ď.



Obr. 15 Modelovanie Pytagorovej vety pre pravouhlý rovnoramenný trojuholník (zdroj: vlastný, podľa nápadu študentky rozširujúceho štúdia [35])

Aktivita: **Pytagorejské trojice I**

Etapa poznávacieho procesu: izolované modely, generický model (abstrakčný zdvih)

Cieľ: určiť dĺžku jednej zo strán pravouhlého trojuholníka

Pomôcky: tabuľka (v prílohe)

Úloha: Doplňte do tabuľky chýbajúce hodnoty pre dĺžky strán pravouhlého trojuholníka – Tab. 13.

p	5	6			28	15	13
q	12		15	9		36	84
z		10	17	15	53		

Tab. 13 Tabuľka s chýbajúcou dĺžkou jednej zo strán pravouhlého trojuholníka (zdroj: vlastný, inšpirované aktivitou od študentov)

Aktivita: **Pytagorejské trojice II**

Etapa poznávacieho procesu: izolované modely, generický model (abstrakčný zdvih)

Cieľ: nájsť čo najviac trojíc prirodzených čísel (a, b, c), ktoré spĺňajú vzťah $a^2 + b^2 = c^2$, objaviť vzťah, že pre každú pytagorejskú trojicu (a, b, c) je aj $(k \cdot a, k \cdot b, k \cdot c)$ trojicou pytagorejskou pre $k \in \boldsymbol{N}$

Pomôcky: štvorcová sieť, pravítko

[35] Ďakujem Vierke O.

Definícia: Trojicu prirodzených čísel (a, b, c) nazývame *pytagorejskou* práve vtedy, ak platí $a^2 + b^2 = c^2$ (teda ak a, b sú dĺžky odvesien a c dĺžka prepony pravouhlého trojuholníka).

Pre čísla do 100 existuje 16 základných pytagorejských trojíc[36]:

(3, 4, 5)	(5, 12, 13)	(8, 15, 17)	(7, 24, 25)
(20, 21, 29)	(12, 35, 37)	(9, 40, 41)	(28, 45, 53)
(11, 60, 61)	(16, 63, 65)	(33, 56, 65)	(48, 55, 73)
(13, 84, 85)	(36, 77, 85)	(39, 80, 89)	(65, 72, 97)

Samozrejme, že od žiakov nie je nutné vyžadovať odhalenie týchto 16 trojíc, ale trojice (3, 4, 5) a (5, 12, 13) a ich násobky predstavujú vhodné izolované modely.[37]

Aktivita: **Triedenie trojuholníkov**

Etapa poznávacieho procesu: kryštalizácia

Cieľ: roztriediť trojuholníky so zadanou dĺžkou strán na pravouhlé, ostrouhlé a tupouhlé trojuholníky

Pomôcky: tabuľka s dĺžkami strán trojuholníkov

Úloha: Roztrieďte trojuholníky so zadanými dĺžkami strán do troch skupín: pravouhlé trojuholníky, ostrouhlé trojuholníky, tupouhlé trojuholníky.

Žiakov je vhodné rozdeliť do skupín a každá skupina dostane rozstrihanú tabuľku – Tab. 14 (uvedená aj v prílohe). Žiaci by mali využiť dva už osvojené poznatky – trojuholníkovú nerovnosť a Pytagorovu vetu. Vďaka trojuholníkovej nerovnosti by mali zistiť, že niektoré trojice čísel nepredstavujú dĺžky strán trojuholníka. Pomocou Pytagorovej vety vyberú trojice čísel, ktoré sú pytagorejskou trojicou (teda predstavujú dĺžky strán pravouhlého trojuholníka). Potom by mali zistiť, že v ostatných prípadoch platí, že súčet druhých mocnín dĺžok kratších strán je väčší alebo menší ako druhá mocnina dĺžky dlhšej strany ($c^2 < a^2 + b^2$ alebo $c^2 > a^2 + b^2$). Tento poznatok je nad rámec štandardov uvedených v IŠVP pre nižšie stredné vzdelávanie, ale vhodným skúmaním môžu žiaci podmienku pre ostrouhlý alebo tupouhlý trojuholník odhaliť (napríklad konštrukciou niektorých

[36] Napríklad trojica (6, 8, 10) nie je základnou pytagorejskou trojicou, je to dvojnásobok základnej trojice (3, 4, 5).

[37] Ako generátor pre pytagorejskú trojicu je možné použiť funkciu dvoch premenných x, y, kde x, y sú prirodzené čísla také, že $x > y$: $a = 2xy$, $b = x^2 - y^2$, $c = x^2 + y^2$. Tento generátor poskytuje veľké množstvo riešení, mnohé z nich sú ale násobné (cs.wikipedia.org).

trojuholníkov, ktorých dĺžky strán nespĺňajú $a^2 + b^2 = c^2$, dvojciferné dĺžky strán môžu byť uvedené v milimetroch).

15, 7, 8	15, 20, 36	8, 3, 15
7, 8, 9	5, 6, 7	$\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$
5, 5, 7	20, 34, $6\sqrt{43}$	0,5; 1,3; 1,2
50, 120, 130	14, 48, 58	4, $4\sqrt{3}$, 8
100, 60, 50	14, 16, 27	1,8; $\sqrt{3}$; 0,8
51, 24, 45	4,3; 5,2; 6,1	3, 15, 20

Tab. 14 Trojice čísel pre dĺžky strán trojuholníkov (zdroj: mrseteacher, https://www.mrseteachesmath.com/2017/01/pythagorean-theorem-inb-pages.html)

Aktivita: **„Prepúšťací“ lístok (Exit ticket)**

Etapa poznávacieho procesu:

Cieľ: získať spätnú väzbu od žiakov, či si zapamätali správne Pytagorovu vetu, či vedia, pre aký útvar ju používame a či vedia uviesť nejakú aplikáciu Pytagorovej vety

Pomôcky: „prepúšťací“ lístok[38] – Obr. 16 a v prílohe

Úloha: Odpovedajte na otázky na lístku.

[38] Tzv. „prepúšťací“ lístok je prostriedkom, ktorý je možné využiť pre hodnotenie získaných poznatkov a získanie spätnej väzby od žiakov. Učiteľ takýto lístok a otázkami alebo úlohami predpripraví a rozdá ich žiakom na konci hodiny. Ak žiak vie otázky zodpovedať (alebo úlohy vyriešiť), tak to znamená, že téme porozumel. Podľa chýb z týchto lístkov, môže učiteľ „odchytať“ neporozumenia a odstrániť ich následne.

Vysvetlite stručne spolužiakom, ktorí neboli v škole:

1. Čo hovorí Pytagorova veta?
2. Kde ju môžeme použiť?
3. Na čo je vhodná?

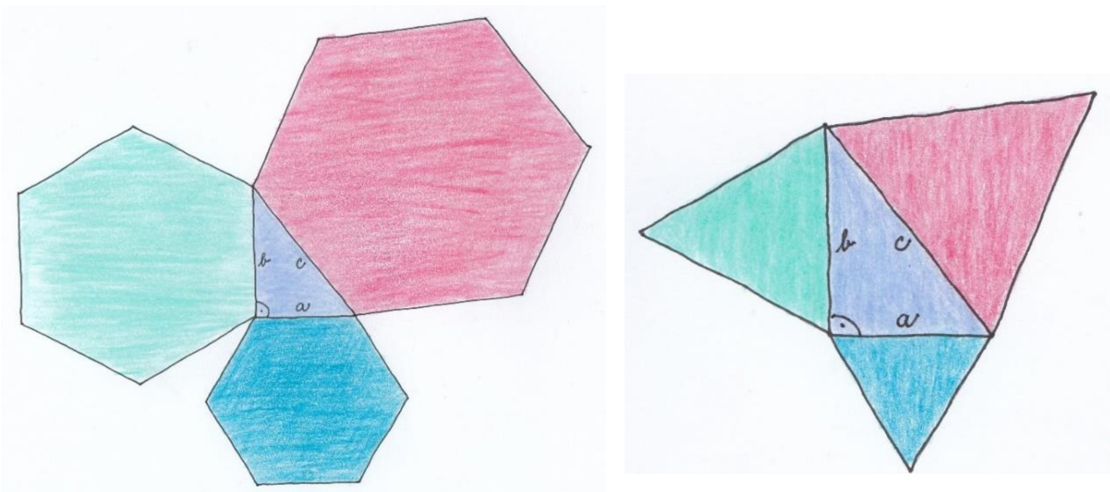
Obr. 16 „Prepúšťací“ lístok (zdroj: vlastný)

Aktivita: **Zovšeobecnená Pytagorova veta**

Etapa poznávacieho procesu: motivácia (nad rámec požiadaviek IŠVP pre nižšie stredné vzdelávanie), etapa abstraktného poznatku

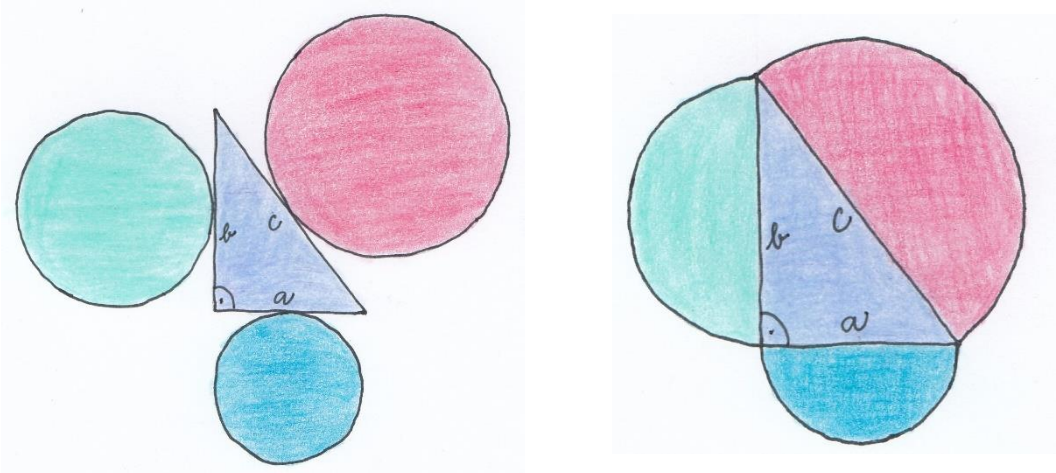
Cieľ: objaviť útvary, pre ktoré je možné použiť zovšeobecnenú Pytagorovu vetu (heuristická metóda)

Zaujímavou témou napríklad pre matematický krúžok či seminár z matematiky na strednej škole[39] môže byť tzv. *zovšeobecnenie Pytagorovej vety*. Pri nej sa štvorce nahradia inými rovinnými útvarmi (kružnice, trojuholníky, šesťuholníky, ...) – Obr. 17, 18. Musia byť ale podobné a ich „šírka“ musí byť priamo úmerná dĺžke príslušnej strany pravouhlého trojuholníka. Súčet obsahov týchto obrazcov zostrojených nad odvesnami pravouhlého trojuholníka je potom rovný obsahu obrazca zostrojeného nad preponou. (Útvary vo všeobecnosti nemusia byť „podobné“, ale už to nie je také efektné.)



Obr. 17 Zovšeobecnenie Pytagorovej vety pre rovnostranné trojuholníky a pravidelné šesťuholníky (zdroj: vlastný)

[39] V prípade šikovných žiakov to môže byť aj v 9. ročníku základnej školy.



Obr. 18 Zovšeobecnenie Pytagorovej vety pre kruhy a polkruhy (zdroj: vlastný)

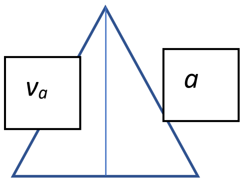
V prípade rovnostranných trojuholníkov zostrojených nad stranami pravouhlého trojuholníka je formulácia Pytagorovej vety nasledovná:

Obsah rovnostranného trojuholníka zostrojeného nad odvesnou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu obsahov rovnostranných trojuholníkov zostrojených nad jeho odvesnami.

Obsah rovnostranného trojuholníka je priamo úmerný dĺžke strany:

$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

$$S_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$$



Preto pre obsahy troch rovnostranných trojuholníkov platí (S_a, S_b – obsahy rovnostranných trojuholníkov zostrojených nad odvesnami a, b, S_c – obsah rovnostranného trojuholníka zostrojeného nad preponou c):

$$S_a + S_b = S_c$$

$$\frac{\sqrt{3}a^2}{2} + \frac{\sqrt{3}b^2}{2} = \frac{\sqrt{3}c^2}{2}$$

Po vydelení celej rovnice číslom $\frac{\sqrt{3}}{2}$ zostane Pytagorova veta: $a^2 + b^2 = c^2$. Pre ostatné obrazce je dôkaz obdobný.

Táto zovšeobecnená formulácia Pytagorovej vety môže predstavovať izolovaný model v procese poznávania a je vhodnou pre rozvoj argumentačných schopností žiakov.

Záver

Školská geometria ponúka množstvo tém, ktoré môžu žiakov zaujímať. Je nevyhnutné im ich ale ponúknuť a zabezpečiť kvalitný proces vytvárania poznatkov bez formálnych znakov. Vytvorenie pevného matematického poznatku si vyžaduje dostatok času a izolovaných modelov. Priskoré zavedenie pomôcok, ktoré podstatu nevysvetľujú, ale na prvý pohľad zvyšujú úspešnosť žiakov pri riešení úloh, môžu poškodiť kvalitu poznatkov.

Literatúra:

1. Bero, P. (1989) *Matematici, ja a ty*. Bratislava: Mladé letá.
2. Csachová, L., Jurečková, M., Tkačik, Š. (2022) *Kritické miesta školskej matematiky*. Ružomberok: Verbum.
3. Divišová, B. (2012) *Geometrické úlohy řešitelné vhledem.* (Dizertačná práca.) Praha: PedF, Univerzita Karlova.
4. Hejný, M. (2004) *Mechanizmus poznávacího procesu.* In Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (eds.): Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Praha: PedF UK v Praze, 2004, s. 23–42.
5. Hejný, M. (2014) *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
6. Janičová, M. (2020) *Metódy práce s nadanými žiakmi a aktivity na hodine matematiky.* In Slavíčková, M. (ed.): Dva dni s didaktikou matematiky 2020, zborník príspevkov, str. 82-87.
7. Jirotková, D., Kloboučková, J. (2011) *Pythagorova věta tvořivě.* In: Pěchoučková, Š.: Tvořivost v počátečním vyučování matematiky, Plzeň: Západočeská Univerzita v Plzni, s. 100-104.
8. Klieme, E., Pauli, Ch., Reusser, K. (2009) *The Pythagoras Study. Investigating effects of teaching and learning in Swiss and German mathematics classrooms.* In Janik, T. (ed.): The power of video studies in investigating teaching and learning in the classroom. Münster: Waxmann, 137-160.
9. Kubáček, Z., Černek, P., Žabka, J., a kol. (2008) *Matematika a svet okolo nás.* Bratislava: vydavateľstvo Mgr. Pavol Cibulka, Európsky sociálny fond.
10. Loomis, E. (1968) *The Pythagorean Proposition.* USA: National Council of Teachers of Mathematics.
11. Rendl, M., Vondrová, N. a kol. (2013) Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
12. Sedmák, R., Hitka, M., Rosak, J. (2007) *Porovnanie vybraných antropometrických znakov dospelej populácie na území Slovenska*. Human Resources Managment & Ergonomics 2/2007.
13. Servít, F. (1907) *Eukleidovy Základy (Elementa).* Praha: Jednota českých mathematiků.
14. Šedivý, O., Vallo, D.: *Základy elementárnej geometrie*. Nitra: FPV UKF v Nitre, 2009.
15. Ulrychová, M. (2011) *Konstrukce poznatků žáky v matematice (na příkladu Pythagorovy věty).* (Dizertačná práca.) Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
16. Valentová, L. (2022) *Analýza kritických miest v školskej matematike na primárnom stupni vzdelávania.* (Dizertačná práca.) Ružomberok: Pedagogická fakulta Katolíckej univerzity.

Iné zdroje:

17. Inovovaný Štátny vzdelávací program pre matematiku (primárne vzdelávanie): https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_pv_2014.pdf
18. Inovovaný Štátny vzdelávací program pre matematiku (nižšie stredné vzdelávanie): https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_nsv_2014.pdf
19. Inovovaný Štátny vzdelávací program pre fyziku (nižšie stredné vzdelávanie): https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/fyzika_nsv_2014-12-03.pdf

PRÍLOHY

Dĺžka odvesny 1	*Dĺžka odvesny 2*	*Dĺžka prepony*

15, 7, 8	15, 20, 36	8, 3, 15
7, 8, 9	5, 6, 7	$\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$
5, 5, 7	20, 34, $6\sqrt{43}$	0,5; 1,3; 1,2
50, 120, 130	14, 48, 58	4, $4\sqrt{3}$, 8
100, 60, 50	14, 16, 27	1,8; $\sqrt{3}$; 0,8
51, 24, 45	4,3; 5,2; 6,1	3, 15, 20

p	5	6			28	15	13
q	12		15	9		36	84
z		10	17	15	53		

Vysvetlite stručne spolužiakom, ktorí neboli v škole:

1. Čo hovorí Pytagorova veta?
2. Kde ju môžeme použiť?
3. Na čo je vhodná?

ISBN 978-80-561-1046-1
9 788056 110461