

**KOŠICKÁ ŠKOLA**  
**DISKRÉTNEJ MATEMATIKY**

**1968 – 2024**

*druhý diel*



# KOŠICKÁ ŠKOLA

## DISKRÉTNEJ MATEMATIKY

1968 – 2024

*druhý diel*

*Štefan Tkačik a kolektív*



Pedagogická fakulta Katolíckej univerzity v Ružomberku  
Ružomberok 2024



*Vydané s podporou projektu KEGA 004KU-4/2022 Osobnosti slovenskej matematiky II – životné vzory pre budúce generácie*

Redaktori: Stanislav Jendroľ, Štefan Tkačik

Recenzenti: Jozef Doboš, Tomáš Lengyelalussy

Obálka: Milan Pudiš

Grafická úprava a sadzba: Jozef Doboš, Štefan Tkačik

© VERBUM - vydavateľstvo KU

Ružomberok, 2024

ISBN 978-80-561-1110-9



---

## OBSAH

---

<b>Predhovor</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>Úvod</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>1 Počiatky vzniku košickej školy DM</b> . . . . .	<b>19</b>
1.1 Ernest Jucovič – zakladateľ školy . . . . .	19
1.2 Stanislav Jendroľ – rozvíjateľ školy . . . . .	29
1.3 Významné podujatia . . . . .	34
1.3.1 KOKOS – KOšický KOmbinatorický Seminár . . . . .	34
1.3.2 Workshop Cycles & Colourings . . . . .	35
1.3.3 Pár slov o medzinárodnom workshope C&C . . . . .	40
1.3.4 KKM – Konferencia košických matematikov . . . . .	48
<b>2 Významné osobnosti KŠDM</b> . . . . .	<b>55</b>
<b>3 Spomienky účastníkov KOKOSu a C&amp;C</b> . . . . .	<b>83</b>
3.1 On collaboration Košice and Zielona Góra... . .	84
O spolupráci medzi skupinami teórie grafov... .	85
3.2 Memories on a mutual cooperation... . . . .	94
Spomienky na vzájomnú spoluprácu medzi školami DM v Ilmenau a Košiciach . . . . .	95
3.3 A Tribute from Canada . . . . .	106
Pocta z Kanady . . . . .	107
3.4 Ako ovplyvnila môj profesionálny život KŠDM	117
3.5 The High Tatras are really a beautiful place... .	126
Vysoké Tatry sú skutočne nádherným miestom na Zemi . . . . .	127
3.6 A pleasure to stay and collaborate with the Košice group . . . . .	132

	Príjemnosť pobudnúť a spolupracovať s košickou skupinou . . . . .	133
3.7	Moje podnetné vyše 10 ročné pôsobenie v KŠDM . . . . .	139
3.8	Many warm memories on mutual contacts... Veľa príjemných spomienok na kontakty s členmi KŠDM . . . . .	142
3.9	Vzpomínky na počátky spolupráce . . . . .	151
3.10	Krátka osobná reflexia na KoKoS . . . . .	154
3.11	Recollections from the C&C and the KOKOS Spomienky na workshop C&C a seminár KOKOS . . . . .	158
3.12	Niekoľko poznámok o spolupráci... . . . .	164
3.13	Workshop on Cycles and Colouring... . . . . Workshop Cycles and Colouring . . . . .	170
3.14	The influence of the Košice Graph Th. Group... Vplyv vedeckých podujatí košickej skupiny z teórie grafov na môj vedecký život . . . . .	176
3.15	A few examples of inspirations from Košice... Niekoľko príkladov inšpirácií z košickej skupiny teórie grafov . . . . .	182
<b>4</b>	<b>Spomienky účastníkov KKM . . . . .</b>	<b>195</b>
4.1	KKM v mojom živote . . . . .	196
4.2	Moje spomienky na pozvanú prednášku . . . . .	200
4.3	Celok (konferencia) je viac ako súčet jeho častí	206
4.4	Moje dojmy a postrehy z konferencie . . . . .	209
4.5	Konferencia košických matematikov mojimi očami . . . . .	213
<b>5</b>	<b>Najúspešnejšie riešená problematika . . . . .</b>	<b>217</b>
5.1	Úvod . . . . .	217
5.2	Stenové a vrcholové vektory . . . . .	220
5.3	Autoduálne mnohosteny . . . . .	223
5.4	Ľahké hrany . . . . .	224
5.5	Ľahké cesty . . . . .	226
5.6	Súvislé ľahké podgrafy rôzne od ciest . . . . .	228



5.7	1-planárne grafy . . . . .	232
5.8	Erdősov problém o minimálnej váhe grafu . . . . .	234
5.9	Mnohosteny s najviac dvomi typmi hrán . . . . .	235
5.10	Chemické grafy . . . . .	237
5.11	Dlhé kružnice v polyedrálnych grafoch . . . . .	239
5.12	Cyklické zafarbenia rovinných grafov . . . . .	240
5.13	Faciálne zafarbenia rovinných grafov . . . . .	242
5.13.1	Faciálne zoznamové zafarbenie rovinných grafov . . . . .	243
5.13.2	Faciálne nerepetitívne zafarbenia . . . . .	244
5.13.3	Faciálne zafarbenia s jedinečným maximom . . . . .	244
5.13.4	Faciálne zafarbenia s nepárnym výskytom farieb na stenách . . . . .	245
5.13.5	Faciálne bezanagramové hranové zafarbenia . . . . .	246
5.13.6	Krátke monochromatické faciálne cesty	246
5.14	Paletové zafarbenia všeobecných grafov . . . . .	247
5.15	Silné hranové zafarbenia . . . . .	248
5.16	Hviezdicové hranové zafarbenia . . . . .	249
5.17	Homogénne grafové zafarbenia . . . . .	249
5.18	Zovšeobecnené zafarbenia grafov ... . . . .	250
5.19	Rozklad dedičných vlastností ... . . . .	253
5.20	Vybrané problémy algoritmickej teórie grafov .	254
5.21	Problémy Ramseyovského typu . . . . .	255
5.22	Ohodnotenia grafov . . . . .	257
5.22.1	Magické grafy . . . . .	258
5.22.2	Iregulárne ohodnotenia . . . . .	259
5.22.3	Antimagické grafy . . . . .	262
5.23	Aplikácie teórie grafov pri ochrane sietí... . . . .	264
5.24	Priesečníkové čísla grafov . . . . .	266
5.25	Aplikácie grafov v sieťach . . . . .	269
5.26	Dimenzie grafov . . . . .	270
<b>6</b>	<b>Budúcnosť a smerovanie KŠDM . . . . .</b>	<b>271</b>
<b>7</b>	<b>Obrazová príloha . . . . .</b>	<b>275</b>



---

## PREDHOVOR

---

Novodobá slovenská matematika nemá príliš dlhú históriu. Jej počiatky siahajú do 30-tych rokov 20. storočia a veľmi úzko súvisia so vznikom slovenských vysokých škôl. Prvé počiatky novodobej histórie vysokého školstva na východnom Slovensku siahajú do roku 1937, keď bola zriadená Štátna vysoká škola technická Dr. Milana Rastislava Štefánika v Košiciach, ale skutočnému rozvoju vysokoškolskej matematiky na východe Slovenska dochádza až koncom 50-tych a začiatkom 60-tych rokov. Veľkým impulzom v jej rozvoji bol príchod významných matematikov ako prof. Cyrila Palaja, prof. Josefa Korousa, akademika prof. Jána Jakubíka, prof. Ernesta Jucoviča, prof. Františka Jurgu, prof. Igora Kluvánka a prof. Leva Bukovského, ktorí výraznou mierou pomohli v budovaní košickej matematickej školy.

A práve vďaka nim a ich študentom vznikajú významné impulzy pre rozvoj matematiky prostredníctvom seminárov, konferencií. Najväčší rozmach dosiahli v 90-tych rokoch. Vtedy sa organizovalo 11 seminárov z matematiky<sup>1</sup>:

- Seminár usporiadané algebraické štruktúry  
(Prof. RNDr. J. Jakubík, DrSc.)
- Košický kombinatorický seminár  
(Prof. RNDr. S. Jendroľ, DrSc.)
- Seminár z diferenciálnych rovníc na TU  
(Prof. RNDr. V. Šoltés, CSc.)
- Seminár z teórie množín  
(Prof. RNDr. L. Bukovský, DrSc.)
- Seminár z diferenciálnych rovníc na PF UPJŠ  
(Doc. RNDr. J. Ohriska, CSc.)

---

<sup>1</sup> Správa o činnosti pobočky JSMF v Košiciach z roku 1999.

- Seminár z diferenciálnych rovníc, ich aplikácií a numerických rovníc na FEI TU  
(Doc. RNDr. V Pirč, CSc.)
- Seminár z aplikovanej matematiky  
(Doc. RNDr. J. Pidany, CSc.)
- Seminár kombinatorické optimalizačné metódy UPJŠ  
(Doc. RNDr. K. Cechlárová, CSc.)
- Seminár kombinatorická optimalizácia na TU  
(Doc. RNDr. M. Gavalec, CSc.)
- Seminár spojité štruktúry v reálnej analýze  
(Doc. RNDr. J. Doboš, CSc. a RNDr. R. Frič, CSc.)
- Seminár paralelných výpočtov  
(Doc. RNDr. M. Pavluš, CSc.)

Nie všetky vydržali až do súčasnosti. Z tých, ktoré sa konajú až dodnes môžeme uviesť Seminár usporiadané algebraické štruktúry, ktorý po akademikovi Jakubíkovi vedie prof. Danica Studenovská. Ďalší, Seminár z oblasti teórie množín a topológie, ktorý založil a dlhé roky viedol prof. Lev Bukovský, po ňom ho vedie RNDr. Jaroslav Šupina. Košický kombinatorický seminár, ktorý založil prof. Ernest Jucovič, po ňom dlhé roky viedol prof. Stanislav Jendroľ a po ňom ho v súčasnosti vedie prof. Tomáš Madaras. Prof. Stanislav Jendroľ stál pri zrode významnej medzinárodnej konferencie (workshopu) Cycles and Colourings v roku 1992 a neskôr pri vzniku spoločného fóra pre ľudí profesionálne sa zaoberajúcich matematikou žijúcich na východe Slovenska – Konferencie košických matematikov v Herľanoch, ktorú dnes organizuje výbor Košickej pobočky Jednoty slovenských matematikov a fyzikov (osobne a s veľkým zaujatím to robili a robia najmä doc. Ján Buša, RNDr. Erika Fecková Škrabuláková a doc. Andrea Feňovčíková).

Je samozrejme veľmi ťažké zachytiť podrobný, celkový a úplný zoznam všetkých aktivít, a preto sa chceme zamerať len na tieto štyri najvýznamnejšie podujatia, ktoré výraznou mierou ovplyvnili smerovanie matematiky nielen na východe Slovenska, ale trúfam si povedať, že vo svetovom merítku:

- Seminár z teórie množín a topológie,
- Košický kombinatorický seminár,
- medzinárodná konferencia (workshop) *Cycles and Colourings*,
- Konferencia košických matematikov.

Tieto podujatia a hlavne ľudia, ktorí ich organizovali a aj sa ich aktívne zúčastňovali, pomohli vychovať a rozvinúť niekoľko generácií matematikov a učiteľov matematiky.

Inšpiráciou a kľúčovým rozhodnutím pre vznik publikácií práve o košickej matematickej škole boli rozhovory s prof. Levom Bukovským a prof. Stanislavom Jendroľom pri príprave a vzniku publikácií o nich, v rámci *Edície Osobnosti slovenskej matematiky*. V tejto publikácii približujeme ďalšie tri významné podujatia *Košický kombinatorický seminár*, workshopy *Cycles and Colourings* a *Konferenciu košických matematikov* usporadúvanú pravidelne v Herľanoch. Všetky tri podujatia veľmi úzko spolu súvisia a môžeme ich chápať ako súčasť prostredia, ktoré výrazným spôsobom sa úspešne podieľalo v rozvoji Košickej školy diskkrétnej matematiky, ktorá existuje takmer 60 rokov. Dnes sa Vám do rúk dostáva po Košickej škole teórie množín a topológie (Seminár prof. Leva Bukovského) jej pokračovanie, 2. diel, publikácia, ktorá je venovaná Košickej škole diskkrétnej matematiky. Jej by sme mohli dať prívlastok vedecká škola prof. Ernesta Jucoviča a jeho nasledovníka prof. Stanislava Jendroľa.

Na záver by som chcel poďakovať všetkým, ktorí prispeli do uvedenej publikácie svojimi spomienkami a pohľadom na Košickú školu diskkrétnej matematiky. Osobitná veľká vďaka patrí prof. RNDr. Stanislavovi Jendroľovi, DrSc., bez ktorého pomoci, zánietenosti a rád by uvedená publikácia určite nevznikla. Vďaka patrí prof. RNDr. Martinovi Bačovi, CSc. za cenné rady pri vzniku tejto publikácie a aj prof. RNDr. Tomášovi Madarasovi, PhD., ktorý aj napriek pracovnej vyťažnosti si našiel čas a prispel kľúčovými príspevkami a pevne

veríme, že bude ďalej pokračovať a vytvárať budúcnosť uvedeného seminára KOKOS a workshopu C&C spolu so svojimi najbližšími spolupracovníkmi. Osobitná veľká vďaka patrí prof. RNDr. Jozefovi Dobošovi, CSc. za tex-nickú pomoc pri sádzaní tohto textu a určite aj všetkým prispievateľom, ktorí svojimi príspevkami obohatili túto publikáciu.

Vďaka patrí aj agentúre KEGA, s ktorej finančnou podporou sa podarilo pripraviť a vydať túto publikáciu.

*Ružomberok,*

*Štefan Tkačik*

---

## ÚVOD

---

Počiatky vzniku a rozvoja vyučovania matematiky na univerzitách v regióne východného Slovenska sa spájajú s rokom 1657 a mestom Košice. V tomto roku vznikla v danom regióne aj prvá jezuitská univerzita, na ktorej pôsobili menej známi matematici, ako napr. Ján Dubovszky alebo Michal Lipsicz. Práve posledne zmieneny vydal prvú učebnicu algebry na Slovensku a aj v Uhorsku - *Algebra seu analysis speciosa ad arithmetica[m] usualem applicata, ...in tres partes nunc divis[a]* (1738). Koncom 18. storočia však univerzity zanikli alebo sa pretransformovali na akadémiu (Košická kráľovská akadémia, Kráľovská akadémia v Bratislave, Banícka akadémia v Banskej Štiavnici) a až na začiatku 20. storočia dochádza k opätovnému vzniku a rozvoju univerzitého vzdelávania na území Slovenska.

K opätovnému veľkému univerzitnému rozvoju dochádza na prelome 50-tych a 60-tych rokov. Práve v roku 1963 vzniká Prírodovedecká fakulta UPJŠ v Košiciach a postupne od roku 1965 dochádza na nej k vzniku Katedry matematiky. Hneď v jej začiatkoch od roku 1963 začal pôsobiť (najprv externe a od roku 1966 ako kmeňový zamestnanec) prof. Dr. Ernest Jucovič, DrSc., ktorý dovtedy pôsobil na Pedagogickej fakulte UPJŠ v Prešove. V Prešove môžeme hľadať počiatky jeho seminára z diskkrétnej matematiky, v ktorom sa snažil pokračovať v Košiciach. V Košiciach daný seminár „padá“ na úrodnú pôdu a práve túto udalosť v roku 1968 môžeme považovať za začiatok vzniku Košickej školy diskkrétnej matematiky. Táto veľká osobnosť slovenskej matematiky dokázala výrazným spôsobom posunúť výskum kombinatorickej geometrie a najmä kombinatorických vlastností mnohostenov na svetovú úroveň. Neboli to len jeho vynikajúce vedecké výsledky ohľadom konvexných mnohostenov a s nimi súvisiacimi gu-

lovými plochami, ale to čo robí matematika veľkým – nájst svojich pokračovateľov a vychovať nových vedeckých pracovníkov v danej oblasti, ktorí dokážu nielen pokračovať v jeho práci, ale dokážu svojimi výsledkami prekonať svojich učiteľov. K tomu patrí aj možnosť vplývať na vedeckú komunitu vytvorením vedeckých tímov, resp. spoločným riešením a vyriešením výskumných úloh a usporadúvaním vedeckých podujatí. Na nich môžu mladí vedeckí pracovníci prezentovať svoje výsledky, nájst odpovede na mnohé zložité otázky vo svojom výskume, ale môžu sa začleniť do nových alebo existujúcich vedeckých tímov a napredovať vo svojej vedeckej práci. Prof. E. Jucovičovi sa podarilo vychovať skvelých svetoznámych matematikov. Určite k najznámejším z nich patrí Dr. h. c. prof. RNDr. Stanislav Jendroľ, DrSc., ktorý stál ešte ako študent pri začiatkoch známeho Košického kombinatorického seminára (KOKOS) koncom 60-tych rokov. V týchto rokoch (od roku 1971) sa na viac ako 20 rokov stal prof. E. Jucovič vedúcim jednej z katedier matematiky na PF UPJŠ a významným spôsobom sa pričínal o rozvoj nielen diskkrétnej matematiky v Košiciach.

Táto publikácia ma za cieľ zachytiť túto neľahkú cestu a ukázať ako sa podarilo vybudovať pracovisko, ktoré je v súčasnosti svetovo uznávané. O tom sa môže čitateľ dočítať v kapitole Počiatky vzniku Košickej školy diskkrétnej matematiky, ktorá bližšie opíše zakladateľa tejto školy – prof. E. Jucoviča a jeho pokračovateľa prof. S. Jendroľa, ktorému sa podarilo vybudovať dané pracovisko na svetovo rešpektované. Tiež bližšie opíšeme tri najvýznamnejšie podujatia, ktoré tomu napomohli (KOKOS, workshopy Cycles and Colourings a Konferencia košických matematikov). Tieto podujatia výrazným spôsobom pomohli k vybudovaniu skvelých matematických tímov aj k nadviazaniu medzinárodnej spolupráce. Ale tiež pomohli k širšej propagácii vedeckých výsledkov medzi ľuďmi „živiacich sa matematikou“ v rôznych oblastiach spoločenského života. Poskytli aj miesto pre prezentáciu výsledkov začínajúcim vedeckým pracovníkom a umožnili im zapojiť sa do medzinárodných tímov. Práve o tom sa čitateľ môže do-



čítať v kapitolách 3. (Spomienky niektorých členov KŠDM ako aj niektorých účastníkov KOKOSu a workshopov C&C) a 4. (Spomienky účastníkov Konferencie košických matematikov). O tom, že za 56 rokov KŠDM sa podarilo vychovať veľmi veľa talentovaných matematikov svedčí 2. kapitola Významné osobnosti KŠDM, ktorá prináša krátke predstavenie len 17-tich najvýznamnejších z nich, ktorí dosiahli vynikajúce výsledky v danej oblasti. Výber najvýznamnejších výsledkov, ktoré boli dosiahnuté žiakmi školy na košickom pracovisku, sa nachádza v 5. kapitole Najúspešnejšie riešená problematika KŠDM. Nasledujúca kapitola Budúcnosť a smerovanie KŠDM ukazuje, že budúcnosť tejto školy sa bude ďalej výrazným spôsobom rozvíjať, lebo našla pokračovateľov, doc. RNDr. Romana Sotáka, PhD. a prof. RNDr. Tomáša Madarasa, PhD., ktorí budú ukazovať jej smer do budúcnosti. Posledná 7. kapitola prináša fotografie na mnohé nezabudnuteľné chvíle, ktorými si Košická matematická škola prešla za takmer 60 rokov svojej existencie.

Na tomto mieste sa žiada pripomenúť, že ďalší úspešný člen Košickej školy diskkrétnej matematiky, prof. RNDr. Gabriel Semanišin, PhD., sa už viac rokov, spolu s prof. RNDr. Viliamom Geffertom, DrSc., podieľa na budovaní ďalšieho úspešného košického príbehu, Košickej školy teoretickej informatiky.

Pevne veríme za autorov tejto publikácie, že sme dokázali zachytiť podstatné momenty a dokážeme Vám priblížiť námahu, úsilie ale aj skvelé momenty na tejto neľahkej ceste.

Na záver by som zakončil životným krédom prof. S. Jendroľa

*Učitelia, majte radi svoj odbor a deti, ktoré učíte.*



---

## POČIATKY VZNIKU KOŠICKEJ ŠKOLY DISKRÉTNEJ MATEMATIKY

---

### **1.1 Prof. Dr. Ernest Jucovič, DrSc. – zakladateľ školy**

*Stanislav Jendroľ*

Je veľkým šťastím pre človeka, ak už v mladom veku stretne (dostane) dobrého učiteľa. Ja som mal šťastie na viacerých, ktorí formovali a ovplyvnili môj život výrazným spôsobom. Jedným z nich, ktorý ma ovplyvnil najviac a stretnutie, s ktorým vymedzilo zvyšnú časť orientácie môjho života, bol môj akademický otec prof. Dr. Ernest Jucovič, DrSc. Rád si naňho spomínam. Mal som ho rád, hoci bol na mňa neraz veľmi prísny. Som mu vďačný za mnohé veci, ktoré som sa od neho naučil, a ktoré som potom často využíval. Mal som to šťastie byť súčasťou úspešného príbehu, ktorý sa volá Košická škola Diskrétnej matematiky. Na začiatku príbehu bol prof. Jucovič, ktorý ho štvrté storočie úspešne rozvíjal. Po jeho odchode do dôchodku mi pripadla úloha byť jeho pokračovateľom. Mal som možnosť z blízka, z vnútra príbehu, podieľať sa na ňom ďalších dvadsaťpäť rokov. Ostatných pár rokov je jeho osud v rukách akademických vnukov prof. Jucoviča.

V nasledujúcom texte sa chcem podeliť o moje videnie, radosti, úspechy, rady ale aj moje či naše pochybenia, ktorých by sa mali naši nasledovníci vyvarovať.

Prof. Jucovič sa narodil 6. augusta 1926 v Liptovskom Hrádku v chudobnej robotníckej rodine. Vyrastal na Lipto-

ve. Jeho mladosť silne poznačili roky druhej svetovej vojny. V rokoch 1946 – 1950 študoval učiteľstvo matematiky a fyziky. Po absolvovaní Pedagogickej fakulty Karlovej univerzity pracoval v Prahe – rok vyučoval na strednej škole, dva roky bol odborným redaktorom pre vydávanie učebníc matematiky. Od roku 1953 pomáhal budovať vysoké školstvo na východnom Slovensku. Pôsobil najprv v Prešove (Vysoká pedagogická škola, Pedagogický inštitút, Pedagogická fakulta Univerzity P. J. Šafárika) a neskôr v Košiciach – od roku 1966 bola jeho pracoviskom Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika (PF UPJŠ). Od roku 1971 bol vedúcim Katedry geometrie a algebry PF UPJŠ. Za docenta sa habilitoval v roku 1961, za profesora bol menovaný v roku 1977. Kandidátom fyzikálno-matematických vied (CSc.) sa stal v roku 1966, doktorom fyzikálno-matematických vied (DrSc.) v roku 1974.

Výrazne sa zapísal do povedomia svojich východoslovenských pracovísk. Nenápadným, ale pritom hlboko premysleným a koncepcným spôsobom sa snažil o presadzovanie aktuálnych zmysluplných požiadaviek. Intenzívne sa zaoberal metodikou (teóriou) vyučovania matematiky. Bol spoluautorom Zbierky úloh z planimetrie, ktorá sa dočkala 12 vydaní, i dvoch učebníc geometrie. V Košiciach sa jeho záujem sústredil na vybudovanie odborne silnej katedry ako základne pre kvalitné jednodborové štúdium matematiky na PF UPJŠ. Ako odborný školiteľ dovedol k úspešnej obhajobe kandidátskych dizertačných prác ôsmich aspirantov (S. Jendroľ, M. Trenkler, P. Mihók, F. Olejník, M. Horňák, J. Ivančo, A. Nagy a A. Kundrík). Veľa záslužnej práce pri povznášaní úrovne matematiky na východnom Slovensku vykonal aj v rámci Jednoty československých matematikov a fyzikov (JČSMF).

Je jedným z priekopníkov kombinatorickej matematiky na Slovensku. Koncom šesťdesiatych rokov založil vedecký seminár pod názvom *Kombinatorické štruktúry*. Seminár bol neskôr premenovaný na KOKOS (KOšický KOmbinatorický Seminár). Pod jeho vedením sa tu postupne sústredil schopný

kolektív najmä mladých matematikov z viacerých košických matematických pracovísk, ktorého plodná vedecká činnosť pretrvala s dobrým ohlasom u nás i v medzinárodnom meradle až do dnešných dní.

Ja som sa s prof. Jucovičom stretol v roku 1966, keď som nastúpil ako študent 1. ročníka učiteľstva matematiky a fyziky na Prírodovedeckú fakultu UPJŠ. Prednášal nám Analytickú geometriu. Robil to veľmi kľudným spôsobom. Všetkému, čo povedal, som hneď na prednáške porozumel. Koncom druhého semestra som u neho absolvoval skúšku. Nebolo to na výbornú. Dal mi dvojku s tým, že nabudúce mi prílepsi, ak prednesenú látku poriadnejšie „strávim“.

Na jar v roku 1968 začal organizovať skupinku na štúdium vedeckého smeru matematiky, čo bolo vtedajšie pomenovanie pre jednodborové štúdium matematiky. Oslovil Mariána Trenklera a aj mňa. Nakoniec sme my dvaja tvorili študijnú skupinu a od 3. ročníka sme už študovali len čistú matematiku. Prof. Jucovič nás s Mariánom pozval do seminára „Kombinatorické štruktúry“, ktorý už bol v tom čase rozbehnutý. V tomto období prof. Jucovič udržiaval intenzívne (písomné) vedecké kontakty s Brankom Grünbaumom, ktorému v tom čase vyšla jeho slávna kniha „Convex Polytopes“. V nej spracoval dovtedy známe poznatky o kombinatorických vlastnostiach konvexných mnohostenov, ktoré boli dovtedy roztrúsené po rôznych časopisoch a zborníkoch. Sformuloval v nej a v nasledujúcich článkoch aj celý rad otvorených problémov. Vyslovil aj viaceré domnienky. Prof. Jucovič mal tieto práce k dispozícii. Mariánovi a mne dal preprinty niekoľkých Grünbaumových prác.

Istá skupina otvorených otázok a hypotéz sa týkala stenových a vrcholových vektorov konvexných trojrozmerných mnohostenov a ich analógií na plochách rôznych od guľovej plochy. Išlo o nasledujúci problém: Každému konvexnému mnohostenu  $P$  je možné priradiť dve postupnosti: stenový vektor  $p = (p_3(P), p_4(P), \dots)$  a vrcholový vektor  $v = (v_3(P), v_4(P), \dots)$ , kde  $p_i(P)$ , resp.  $v_i(P)$  znamená počet  $i$ -uholníkových stien mnohostena  $P$ , resp. počet jeho vrcho-

lov stupňa  $i$ . Úlohou bolo popísať vlastnosti, ktoré môžu mať postupnosti  $p$  a  $v$ .

Prvú prácu o tejto otázke uverejnil v roku 1891 slepý nemecký geometer Viktor Eberhard. Týkala sa kubických mnohostenov. Jej dôkaz zaberá takmer polovicu z 300 stránkovej knihy, ktorú V. Eberhard o konvexných mnohostenoch napísal. B. Grünbaumovi sa podarilo nájsť omnoho kratší dôkaz tejto vety, ktorý sa už nachádza v jeho knihe *Convex Polytopes*.

Mne, ako tretiakovi, sa podarilo dokázať analógiu Eberhardovej vety pre kubické mapy na toruse až na jediný prípad, s ktorým som si nevedel poradiť. Šťastný som utekal za prof. Jucovičom pochváliť sa. Ten ma nechal o tom porozprávať na seminári KOKOS. Moje vystúpenie však bolo hrozné. Nikto z prítomných mi nerozumel. Navyše som aj nešťastne gestikuloval, čo vyvolalo na seminári zlý pocit. O dva dni, keď sme sa upokojili, ma stretol prof. Jucovič. Nehodnotil ma, len mi odporúčal nájsť si iného tútora, iný seminár, napr. doc. Černého, kde by ma lepšie ako on pripravili na budúci život. Keď skončil, ja som mu zahlásil, že aj tak mám pravdu, že veta, o ktorej som mal na seminári rozprávať, platí. Po skončení seminára som si urobil sebareflexiu. Popremýšľal som o tom, čo sa na seminári dialo. Potom prešlo pár dní, až jednu sobotu ráno hlási internátny rozhlas „Jendroľ, máte telefón“. Volal mi prof. Jucovič. Spýtal sa ma, či mám čas, či by som nemohol prísť za ním na fakultu. Tak som tam šiel. Vlúdne ma prijal. Napísal mi pár postupností nezáporných celých čísel, aby som ich zrealizoval ako stenový vektor nejakej kubickej toroidálnej mapy. Keď som mu ukázal, ako by som ich nakreslil, napísal ďalšie. Asi po poldruha hodine ma prepustil.

Potom sme sa stretávali pomerne často. Vždy so mnou trepezlivo debatoval. Asi po mesiaci sme mali hotový úplný dôkaz a za ďalších pár dní bol hotový náš prvý spoločný článok (*On the toroidal analogue of Eberhard's theorem*), ktorý bol publikovaný v „CC-časopise“ **Proc. London Math. Soc.** **25 (1972) 385 – 398**).

Keď bol článok hotový, znovu ma pozval do seminára. Povedal kolegovi, čo sa udialo, a mne, že sa mi moje nevhodné správanie odpúšťa.

Potom sme sa spolu pustili do istej Grünbaumovej domnienky, ktorú sa nám asi po troch mesiacoch podarilo v úplnosti zodpovedať. Vznikla z toho naša ďalšia spoločná publikácia „*On a conjecture by B. Grünbaum*“ uverejnená v časopise **Discrete Mathematics 2 (1972) 35 – 49**.

Prof. Jucovič bol so mnou mimoriadne trpezlivý. Spoločná práca s ním ma očarila. Na nej som matematicky významne vyrastal. Prof. Jucovič na analogickej problematike, berúc do úvahy iné nutné podmienky, pracoval spolu s M. Trenklerom.

Túto problematiku sme vtedy rozpracovali a pracovali na nej ešte zopár rokov. Dosiahli sme celý rad významných výsledkov, ktoré nám doteraz robia dobré meno. Viaceré z nich sú prevzaté do niekoľkých monografických diel, napr. do „**Handbook of Discrete Geometry**“ a „**Handbook of Graph Theory**“. Tvoria zásadnú časť Jucovičovej monografie „*Konvexné mnohosteny*“, ktorá vyšla v roku 1981 vo vydavateľstve VEDA.

V roku 1969 prišli k nám do KOKOSu ďalší dvaja šikovní mládenci P. Mihók a F. Olejník. Prof. Jucovič s nimi pracoval podobne ako s nami, ale už to bolo na témach z teórie grafov a hypergrafov.

V roku 1970 prof. Jucovič pozval do KOKOSu veľmi nadaného prváka M. Horňáka. KOKOS naplno pravidelne pracoval. Referovali sme na ňom o vlastných výsledkoch i o zaujímavých prácach iných autorov. Pracovali v ňom aj kolegovia z VŠT Košice Bučko, Jacoš, Ninčák a viacerí mladí kolegovia.

Treba poznamenať, že starostlivosť o nás sa neobmedzovala len na KOKOS a prípadné osobné stretnutia. Prof. Jucovič sa veľmi snažil, aby sme sa čo najširšie matematicky vzdelávali. Okrem interných učiteľov PF (prof. L. Bukovský, doc. V. Chvál, prof. C. Palaj) nás chodievali učiť dr. I. Havel a prof. M. Fiedler z Prahy a dr. I. Dobrakov z MÚ SAV z Bratislavy.

Prof. Jucovič úzko spolupracoval aj s kolegami mimo Košíc. Okrem spomínaného prof. Fiedlera to boli Juraj Bosák a Štefan Znáť z Bratislavy, Milan Sekanina z Brna a „pražáci“ K. Čulík, J. Sedláček a Z. Hedrlín.

V 60. rokoch sa osobnosti pracujúce v Československu v kombinatorickej matematike začali pravidelne stretávať na československých konferenciách z teórie grafov (CSGT). Výsledkom takýchto stretnutí bola prvá naozajstná celosvetová konferencia z Teórie grafov a Kombinatoriky. Konala sa v lete 1963 v Smoleniciach. Zišli sa na nej v podstate všetci najvýznamnejší grafári svojej doby (C. Berge, G.A. Dirac, P. Erdős, T. Gallai, M. Fiedler, F. Harary, H. Izbicki, A. Kotzig, C. S. J. A. Nash-Williams, H. Sachs, A. A. Zykov).

Mimochodom, v júli 2013 sa u nás v Košiciach, uskutočnilo veľké medzinárodné 7. Czech-Slovak Symposium on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications za účasti takmer 200 účastníkov. Pripomenuli sme si ním 50. výročie smolenickej konferencie.

Od roku 1970 sa konferencia CSGT koná každoročne. Pri jej organizovaní sa striedajú rôzne české a slovenské pracoviská. Doteraz sa ich konalo 59. Veľký priestor na nich od začiatku dostávajú mladí začínajúci matematici.

Na konferenciu CSGT v roku 1970 nás s Mariánom (ako študentov 4. ročníka) vzal prof. Jucovič. Vzal znamená, že pre nás zohnal prostriedky, aby sme sa mohli konferencie zúčastniť. Konferencia sa konala v Modrej – Harmónii a stretli sme na nej viacerých našich budúcich kolegov – grafárov ako J. Nešetřil, B. Zelinka, J. Plesník a mali sme česť spoznať všetky vtedajšie české a slovenské osobnosti pracujúce v kombinatorickej matematike (J. Bosák, Š. Znáť, M. Sekanina, Z. Hedrlín, A. Pultr,...)

V roku 1971 organizoval prof. Jucovič konferenciu CSGT v Zlatej Idke. Aj vtedy už myslel na budúcnosť, na nás mladých. Zúčastnili sme sa jej všetci jeho piati študenti. Vtedy sme si ešte neuvedomovali, aký bol prezieravý, keď na ňu ako hlavných prednášajúcich pozval dvoch mladých hostí László Lovásza z Maďarska, vtedy ešte študenta z Budapešti a Han-



ja Walthera z Nemecka, mladého asistenta z Ilmenau. Pozval ich najmä kvôli nám, kvôli našim budúcim kontaktom. Skamarátili sme sa s nimi. Medzitým sa L. Lovász stal svetoznáмым a slávnym matematikom. Bol profesorom viacerých špičkových svetových univerzít. Dnes patrí k špičkovým svetovým matematickým osobnostiam. Bol napríklad aj prezidentom IMU – svetovej matematickej spoločnosti. Zostal skromným človekom a stále sa k nám hlási. Výrazne ovplyvnil odborné zameranie P. Mihóka.



Obrázok 1: Spolupracovníci z nemeckého Ilmenau Hanjo Walther a Jochen Harant, C&C, 1997. (Foto: Stanislav Jendroľ.)

H. Walther bol po revolučných zmenách v Európe po roku 1989 istý čas ministrom v prvej vláde H. Kohla, ktorá vznikla po zjednotení Nemecka. Bol jedným z mála politikov, ktorí sa po úspešnej politickej kariére vrátili naspäť za katedru. Na základe veľmi dobrého vzťahu s H. Waltherom sme po roku 1990 rozvinuli veľmi užitočnú a plodnú vedeckú spoluprácu medzi pracoviskami diskkrétnej matematiky TU v nemeckom Ilmenau a PF UPJŠ, ktorá nedávno dovŕšila 30 rokov od podpísania Dohody o spolupráci medzi našimi univerzitami. Ešte sa k tomu vrátíme.

Pod vedením prof. Jucoviča sme zorganizovali ešte ďalšie dve konferencie CSGT, obe na Zemplínskej Šírave, v rokoch 1978 a 1983. Na CSGT v roku 1978 prišli ako pozvaní zahraniční účastníci prof. P. Erdős a prof. V. T. Sós z Maďarska a M. Borowiecki z Poľska. My sme sa trochu okúňali priblížiť k týmto slávnym osobnostiam, zato pražskí mladíci J. Nešetřil a V. Rödl s nimi hodne diskutovali. Prof. Jucovič bol z nás, svojich mladých, veľmi sklamaný, keď videl čo sa deje, a že my namiesto rozprávania sa s hosťami, radšej hráme mariáš. Veľmi sme sa z toho poučili a na ďalších konferenciách sme už našich zahraničných hostí prof. Katonu, prof. Borowieckeho a prof. Skupieňa „nenechali“ celkom našim kolegom z iných pracovísk. (Mojim študentom som túto svoju skúsenosť stále pripomínal.)

Prof. Jucovič si vždy veľmi dobre uvedomoval medzinárodný rozmer matematiky. Už počas prešovského pôsobenia udržiaval čulé medzinárodné kontakty s mnohými kolegami, aj keď to nebolo vo vtedajšej dobe jednoduché. Jeho záujem o kombinatorickú matematiku a najmä o diskrétnu geometriu výrazne ovplyvnili maďarskí kolegovia P. Erdős a diskrétny geometer László F. Tóth. Kamarátil sa aj s geometrami Kartesim a Böröckim. Udržiaval úzke kontakty s prof. H. Sachsom z Ilmenau. Viacerí z nich navštívili naše pracovisko. V istom období intenzívne komunikoval s B. Grünbaumom, D. Barnettom a J. Malkevitchom z USA.

Nás od začiatku viedol k uverejňovaniu našich výsledkov v kvalitných medzinárodných časopisoch. Snažil sa nás, svoje akademické deti, posielat na zahraničné pobyty alebo konferencie. Tak napríklad M. Trenkler bol v Nemecku, P. Mihók v Maďarsku, M. Horňák na dlhodobějších pobytoch vo Francúzsku a v Banachovom centre vo Varšave v Poľsku. Ja som strávil v roku 1988 päť mesiacov na pobyte v USA, kde som navštívil Jucovičových „pen-friends“ B. Grünbauma, D. Barnetta a J. Malkevitcha.

V 80-tych rokoch sa Jucovičova akademická rodina rozrástla, pribudli ďalšie akademické deti (J. Ivančo, A. Nagy,



Obrázok 2: Prof. Branko Grünbaum v r. 2000 na „The Klee-Grünbaum Festival of Geometry in Algebra“, Ein Gev See of Galilee (Izrael). (Foto: Stanislav Jendroľ.)

A. Kundrík) i akademickí vnuci (G. Semanišin, R. Soták, M. Tkáč). Mali sme ho radi. Požíval medzi nami veľkú úctu a vážnosť. Bohužiaľ jeho choroba bola už v tak pokročilom štádiu, že ho výrazne obmedzovala.

Vďaka prof. Jucovičovi sme sa aj my, jeho žiaci, stali už v tom čase rešpektovanými osobnosťami v rámci českej a slovenskej matematiky. Už sme si začali vytvárať aj svoje malé vedecké tímy. Postupne sa z nás stávali rivali, hoci inak sme boli dobrí kamaráti. To je však celkom prirodzené v oblasti vedy.

Je treba dodať, že prof. Jucovič sa staral nielen o svoje akademické deti. Vytváral veľmi dobré podmienky aj pre ďalších mladých kolegov, ktorých počas svojho šéfovania prijal na ním vedenú katedru. Spomeňme napríklad Katku Cechlárovú a Petra Butkoviča. Hlavne kvôli ním dochádzal na PF UPJŠ učiť prof. RNDr. Karel Zimmermann, DrSc. z Karlovej univerzity v Prahe. Obaja tam potom obhájili svoje kandidátske práce (CSc., vtedajší ekvivalent súčasného PhD.) v odbore Aplikovaná matematika v oblasti Kombinatorická optima-

lizácia. Veľmi podporoval aj odborný rast Danice Jakubíkovej, ktorá bola veľmi úspešná v Algebre.

Rok 1989 nás našiel pripravených na nové časy. Konečne sme začali mať pocit, že sa nás niekto opýta: „*Ukáž, čo si doteraz ako vysokoškolský učiteľ urobil*“. Vďaka múdreému vedeniu profesora Jucoviča, ktorý nás stále prísne ale dôsledne viedol k poctivej učiteľskej práci a k tvorbe kvalitnej vedy, sme spoločensko-politické zmeny privítali.

Prof. Jucovič bol vedúcim katedier (II. Katedry matematiky, Katedry geometrie a algebry) od roku 1971. Ideologické pôsobenie na ním vedených katedrách bolo skutočne veľmi obmedzené. Vykonali sa len formálne záležitosti ako nástenky a centrálné organizované ideovo-politické vzdelávanie. Inak atmosféra bola naozaj pracovná a tvorivá: mali sme radosť z našich vedeckých výsledkov, bavila nás práca s talentovanou mládežou, venovali sme sa Matematickej olympiáde, angažovali v činnosti pre JSMF a samozrejme pracovali s našimi študentmi. Aj preto po roku 1989 vtedajší mocní nechali prof. Jucoviča pracovať vo funkcii vedúceho katedry až do dovŕšenia veku 65 rokov, čo bol vtedy štandardný vek odchodu do dôchodku všetkých vysokoškolských učiteľov. Tento vek dosiahol v roku 1991. Na PF UPJŠ však pôsobil až do roku 1995, kedy mu už jeho zlý zdravotný stav nedovoľoval chodiť medzi nás. Posledný rok života bol už odkázaný na lôžko, avšak stále bol plný chuti do života. Prof. Jucovič nás navždy opustil v októbri 1998 v rodine svojej dcéry Janky v Banskej Bystrici. Je pochovaný na židovskom cintoríne v Košiciach.

Odkaz profesora Jucoviča je však stále aktuálny. My, jeho akademické deti a vnúčatá, pokračujeme v jeho započatom diele. Otvoril sa nám svet a s ním aj nové možnosti širokej medzinárodnej spolupráce.

Košice sa stali významným centrom pre diskrétnu matematiku. Začiatkom 90-tych rokov boli vytvorené všetky predpoklady k tomu, aby sme výraznejšie dali o sebe vedieť vo svete. Mali sme na čom stavať a naďalej rozvíjať Jucovičove myšlienky.

## 1.2 Prof.RNDr. Stanislav Jendroľ, DrSc. – rozvíjateľ školy

*Štefan Tkačík<sup>1</sup>*

### **Katedra geometrie a algebry PF UPJŠ, roky 1991 – 2002**

Na jeseň v r. 1991 som bol na základe výberového konania vymenovaný za vedúceho Katedry geometrie a algebry (KGA) PF UPJŠ. Pripadla mi náročná úloha plná nových výziev ale aj nových možností. Bolo potrebné oživiť stagnujúcu pracovnú atmosféru na katedre a vybudovať si rešpekt ako riadiaci pracovník. Začal som snahou o vytvorenie príjemnej pracovnej atmosféry na pracovisku ako aj pozitívnej motivácie. Problémom boli najmä nízke platy a lákavé možnosti mimo fakulty za podstatne lepšie finančné ohodnotenie. Na katedre sme v tom čase mali viacerých mladých veľmi šikovných kolegov. Už sme spomínali K. Cechlárovu, P. Butkoviča, D. Jakubíkovu. Boli sme radi, že sa nám podarilo na KGA zamestnať P. Bugatu, R. Sotáka a G. Semanišinu. Aby sme ich mohli udržať, potrebovali sme pre nich vymyslieť niečo lákavé. Všetci traja boli veľmi zdatní aj v informatike. Spolu s doc. P. Mihókom a doc. V. Chválom za podpory prof. Bukovského (ktorý bol v tom čase rektorom UPJŠ) sa nám podarilo kreovať CAI – Centrum aplikovanej informatiky na fakulte, v rámci ktorého na rôznych zákazkách (najmä z oblasti mimo univerzity) si mohli mladí kolegovia prilepšiť k platom. To sa ukázalo ako veľmi dobré a najmä životaschopné. Centrum plnilo naše predstavy a dodnes veľmi efektívne pracuje ako samostatné pracovisko fakulty.

P. Butkovič v r. 1992 odišiel na pracovný dvojročný pobyt do Veľkej Britanie a už sa nevrátil. Získal dobre platenú pozíciu na Univerzite v Birminghame. P. Bugata odišiel z rodinných dôvodov pracovať mimo Košíc. Namiesto nich sa nám podarilo získať ďalších šikovných mladých absolventov I. Fabriciho, T. Madarasa a V. Lacka.

---

<sup>1</sup> Text vznikol na základe rozhovorov s prof. Stanislavom Jendroľom

Tak sa nám podarilo stabilizovať jadro katedry vedecky pracujúce okolo seminárov KOKOS (S. Jendroľ, M. Trenkler, P. Mihók, M. Horňák, J. Ivančo, R. Soták, G. Semanišin, I. Fabrici a T. Madaras), Algebraický seminár (J. Lihová, D. Jakubíková-Studenovská, M. Ploščica, M. Harminc) a Seminár z kombinatorickej optimalizácie (K. Cechlárová, V. Lacko, J. Hajduková). Všetky tri skupiny mali okolo seba šikovných absolventov na študijných pobytoch, resp. doktorandov na KGA. Vo všetkých troch seminároch pracovali aj pracovníci z iných košických matematických pracovísk, najmä z Košickej technickej univerzity a z detašovaného pracoviska Matematického ústavu SAV v Bratislave.

### **Ústav matematických vied, roky 2002 – 2010**

Už koncom deväťdesiatych rokov sa na PF UPJŠ začalo zreteľne javiť, že organizovať štúdium pri vtedajšej rozdrobenej organizačnej štruktúre je takmer nemožné. Aj spolupráca medzi tromi katedrami matematiky narážala na mnohé, zväčša osobné, problémy a záležitosti. Viaceré osobnosti, najmä tie, ktoré už mali značné skúsenosti z pobytov na zahraničných univerzitách, videli schodnú cestu vo vytvorení novej organizačnej štruktúry a to podľa vedných odborov. Ja som túto zmenu podporoval. Nakoľko spomedzi všetkých troch matematických kateder bola Katedra geometrie a algebry najviac stabilizovaná, na návrh vtedajšieho p. dekana, prof. Fehéra som sa prihlásil do výberového konania na funkciu riaditeľa. Na jeho základe som bol menovaný za riaditeľa nového Ústavu matematických vied (ÚMV). Ústav vznikol z Katedry matematickej analýzy a Katedry geometrie a algebry. Katedra informatiky sa transformovala na Ústav informatiky. S novou funkciou mi pribudli nové výzvy a aj nové problémy. Jednak bolo potrebné prerobiť všetky študijné odbory i predmety na iných odboroch, ktoré pokrývala matematika. Dohodnúť financovanie na fakulte, ale aj na ústave, nastaviť nové perspektívne študijné odbory. A samozrejme, rozvíjať kvalitný vedecký výskum najmä na zdedenej katedre. Na ústave sme

zvolili novú štruktúru piatich oddelení. Navyiac sme na fakulte rózne zavádzali kreditový systém štúdia.



Obrázok 3: Excelentný tím Ústavu matematických vied PF UPJŠ, Košice 2017. (Zľava: Roman Soták, Stanislav Jendrol, Mirko Hornák, Mária Maceková, Tomáš Madaras, Igor Fabrici.) (Zdroj: Stanislav Jendrol.)

Najhoršia situácia bola na oddelení matematickej analýzy nakoľko doc. J. Džurina, s ktorým sa rávalo ako s perspektívnou vedúcou osobnosťou, sa rozhodol odísť z fakulty. Našťastie sme tento odchod zvládli. Pomáhali mi prof. Bukovský, doc. RNDr. J. Lihová, (teraz už prof.) K. Cechlárová, ale najmä všetka vtedajšia mládež na ÚMV. Podarilo sa nám presvedčiť prof. RNDr. J. Doboša, CSc., pracujúceho na TU, prísť na našu fakultu. On nám pokryl výučbu Matematickej analýzy a ako profesor teórie vyučovania matematiky nám pomohol garantovať doktorandské štúdium v odbore, v ktorom bol menovaný profesorom. Neskôr sa nám podarilo presvedčiť (dnes už profesora) RNDr. Ondreja Hutníka, PhD., ktorý úspešne, mimo PF, absolvoval doktorandské štúdium z matematickej analýzy. V súčasnosti je už Oddelenie matematickej analýzy pýchou ÚMAT.

V tom čase som bol požiadaný spolu s prof. RNDr. P. Brunovským, DrSc. z FMFI UK pripraviť návrh jadra obsahu, kto-

rý mal byť záväznou súčasťou každého študijného programu odboru Matematika na Slovensku. To isté som mal pripraviť spolu s prof. RNDr. J. Plesníkom ohľadne študijného programu 3. stupňa v odbore Diskrétna matematika. Pri práci na týchto projektoch som si uvedomil, čo by z toho malo byť v našich fakultných študijných programoch na bakalárskom a aj na magisterskom stupni na PF. Pripravili sme jeden študijný program Matematika pre bakalársky stupeň štúdia, a tri programy pre magisterský stupeň štúdia: Manažérska matematika, Informatická matematika, a Finančná a ekonomická matematika. Z nich si mohli absolventi bakalárskeho stupňa štúdia matematiky vyberať. Aj pre tretí, doktorandský, stupeň štúdia sme pripravili tri odbory: Aplikovaná matematika, Diskrétna matematika a Teória vyučovania matematiky. Na učiteľských odboroch sme vynovili obsahovú náplň a tiež, na celej fakulte, zaviedli dvojstupňové učiteľské štúdium.

Pokiaľ išlo o vedecký výskum, tak situácia bola a stále je dobrá pre skupinu diskrétnych matematikov. Pravidelne funguje vedecký seminár KOKOS, ktorý momentálne vedie prof. Madaras. Dlhodobu beží vedecký seminár Teória množín a základy matematiky, ktorý založil a takmer 60 rokov viedol prof. Bukovský. Dlhé roky žije a pracuje aj Algebraický seminár. Po vzore týchto seminárov bežia aj ďalšie.

V r. 2008 som pocítil, že mám uvoľniť miesto riaditeľa ústavu nastávajúcej generácii a už som sa do aktuálneho výberového konania neprihlásil. Už som sa chcel venovať len práci, ktorá ma vždy naplňala – vychovávať študentov a bádateľskej práci. V rokoch 2009 – 2020 bol riaditeľom ÚMV Jucovičov akademický vnuk, môj akademický synovec, Horňákove akademické dieťa – doc. RNDr. Roman Soták, PhD. Je to veľmi bystrý muž, päťdesiatnik, ktorý momentálne už druhé funkčné obdobie vykonáva funkciu dekana PF UPJŠ. Som presvedčený, že on, spolu s prof. Madarasom, sú zárukou, aby bol odkaz prof. Jucoviča naplňaný aj naďalej. V súčasnosti riaditeľom ÚMAT je prof. RNDr. Ondrej Hutník,



PhD., skromný, pracovitý a nadaný mladý muž, ktorý už je dobre etablovaný v slovenskej matematickej komunite.

Ústav matematiky Prírodovedeckej fakulty UPJŠ (ÚMAT PF UPJŠ) je dnes kvalitné matematické pracovisko, jedno z najlepších na Slovensku. Pracuje na ňom 5 riadnych profesorov (dvaja emeritní profesori) a 9 docentov. Problémom je len nižší záujem mládeže o štúdium matematiky na PF UPJŠ a z toho plynúci nedostatok zdrojov na mzdy pracovníkov ÚMAT a na ďalší rozvoj matematiky na UPJŠ vôbec.



Obrázok 4: Prof. Jendroľ a časť z jeho žiakov, 2018. (Zľava: I. Fabrici, F. Kardoš, E. Fecková Škrabuláková, M. Maceková, S. Jendroľ, M. Timková, J. Czap, P. Šugerek). (Foto: Mária Maceková.)

## 1.3 Významné podujatia

*Stanislav Jendrol'*

### 1.3.1 KOKOS – KOšický KOmbinatorický Seminár

KOKOS, ktorý som organizačne zabezpečoval od roku 1971, dodnes naplno pracuje. Má takmer 60 rokov. Schádzame sa pravidelne počas semestra, vždy v utorok o 14.00 hod. Bol som jeho vedúcim od r. 1992 až do r. 2010. Odvtedy je jeho vedúcim prof. RNDr. Tomáš Madaras, PhD. Organizačne ho však Tomáš zabezpečuje už o niekoľko rokov viac. Prof. Tomáš Madaras je jedno z mojich 18 akademických detí.

Seminár má od začiatku pracovný ale veľmi priateľský charakter. Snažíme sa na ňom udržiavať prajnú atmosféru. Obsahovú náplň obyčajne určujú starší, skúsenejší kolegovia. V seminári sú prezentované nové zistenia a tvrdenia a ich dôkazy dosiahnuté účastníkmi. Tie sú obyčajne prijaté veľmi kriticky ale priateľsky. KOKOS je miestom, kde naši doktorandi po prvýkrát prezentujú verejne svoje výsledky a kde aj skúsenejším kolegom sú nájdené medzery v ich dôkazoch. Často sú prednášané aj zaujímavé už publikované výsledky iných autorov. Z času na čas v KOKOSE vystupujú hostia, ktorí sú na pracovných pobytoch v Košiciach. Nižšie, na inom mieste, sú prezentované viaceré významné výsledky a problematiky, v ktorých účastníci seminára boli úspešní, a ktoré boli po publikovaní veľmi pozitívne prijaté medzinárodnou matematickou komunitou.

Nám, košičanom, sa podarilo dostať „Diskrétnu matematiku“ ako vedný odbor do oficiálneho zoznamu vedných odborov na Slovensku a neskôr aj ako oficiálny študijný odbor na III. stupni vysokoškolského vzdelávania. Stali sme sa prvou slovenskou fakultou, na ktorej sa dá (od r. 1996) študovať „Diskrétna matematika“ v akreditovanom študijnom odbore doktorandského štúdia. Doteraz sme v ňom vychovali viac ako 60 nositeľov vedeckej hodnosti PhD. Žiaci Košickej školy diskkrétnej matematiky za tie roky uverejnili, prevažne

v špičkových svetových vedeckých časopisoch, viac ako 500 pôvodných vedeckých prác a predniesli desiatky pozvaných prednášok na medzinárodných vedeckých konferenciách po celom svete.

Diskrétna matematika a jej aplikácie sú kľúčovou náplňou obsahu matematických študijných programov, ktoré sa študujú na bakalárskom i magisterskom stupni vysokoškolského štúdia na PF UPJŠ. Ako prví na Slovensku (v r. 1994) sme otvorili doktorandský študijný program Diskrétna matematika. Diskrétna matematika je aj základnou disciplínou na všetkých informatických odboroch.

Skupine diskretných matematikov sa darí za posledných 30 rokov získavať grantové prostriedky na svoju činnosť. Úspešne (vynikajúcim spôsobom) sme vyriešili 5 projektov APVV, 8 medzinárodných bilaterálnych projektov a 8 projektov cez agentúru VEGA.

V rámci KOKOSu vyrástli 5 profesori (M. Bača, M. Horňák, S. Jendroľ, T. Madaras, G. Semanišin) a 8 docenti (M. Trenkler, P. Mihók, F. Olejník, R. Soták, J. Ivančo, M. Klešč, M. Tkáč, A. Feňovčíková).

### 1.3.2 *Workshop Cycles & Colourings*

Z môjho pohľadu bol pre nás a pre neformálne ustanovenie Košíc ako významného medzinárodného centra diskretnej matematiky dôležitý rok 1991. Československou grafárskou komunitou sme boli poverení zorganizovať tradičnú československú konferenciu z teórie grafov (CSGT). Konala sa koncom mája 1991 opäť na Zemplínskej Šírave. Bola to naša prvá konferencia organizovaná bez prof. Jucoviča. Boli sme, ako matematici chudobní, napriek tomu sme sa odhodlali pozvať na konferenciu našich dovtedajších priateľov profesorov M. Borowieckeho a Z. Skupieňa z Poľska, G.O.H. Katonu z Matematického ústavu Maďarskej akadémie vied, G. Hahna z Kanady a H. Walthera z nemeckého Ilmenau. Profesor H. Walther bol vtedy ministrom (jeden zo štyroch z občanov vtedajšej NDR) v spolkovej nemeckej vláde H. Kohla. Na-

priek tejto funkcii prišiel na konferenciu spolu s profesormi J. Harantom a E. Hexelom a svojou doktorandkou M. Voigt. Veľmi nás tým potešili. Na konferencii bolo veľa účastníkov zo všetkých kútov Česka a Slovenska, krásne počasie, kvalitná matematika, výborné jedlo a veľmi chutné tokajské víno. Takže konferencia sa vydarila po všetkých stránkach. Lúčili sme sa s tým, že sa určite musíme opäť stretnúť a to čo najskôr.

Druhou významnou udalosťou v roku 1991 pre mňa osobne bola medzinárodná geometrická konferencia v maďarskom Szegede. Osud ma na ňu zavial náhodou. Prof. Jucovič ma chcel vedecky profilovať na geometriu vzhľadom na moje práce z diskkrétnej geometrie. Grafárov na Katedre geometrie a algebry mal viesť P. Mihók alebo M. Horňák. Tak som za ním zašiel s tým, že ak mám byť geometrom, tak nech mi pomôže dostať sa na spomínanú geometrickú konferenciu. Stalo sa. V Szegede som stretol mnohých matematikov, ktorých mená som poznal z ich prác. S viacerými z nich som mal sporadické písomné kontakty. Bola to prvá veľká geometrická konferencia, na ktorej sa po skončení studenej vojny mohli stretnúť geometri z Východu i Západu v takom veľkom počte (viac ako 100 ľudí).

Moje vystúpenie malo veľký úspech. Prezentoval som tam niektoré naše výsledky z kombinatorických vlastností konvexných mnohostenov. Prednášková miestnosť, kde som prednášal, bola natrieskaná. Po skončení prednášky bola bohatá verejná diskusia, ktorá pokračovala aj následne v kuloároch.

Na konferencii bol prítomný aj prof. Joseph Zaks z Haify (Izrael). Jeho matematická problematika, na ktorej pracoval, bola takmer totožná s našou. Tak sme sa hneď skamarátili. Už predtým, počas totality, som si s nimi vymenil pár listov. Pozval ma do Izraela. V marci 1992 organizoval veľkú medzinárodnú geometrickú konferenciu v Nasholime. Následne pozval aj prof. Jucoviča a doc. Trenklera. Prof. Jucovič bol tam veľmi šťastný. Kolegovia z Izraela sa o neho mimoriadne pozorne starali. Aj nás ostatných hostili veľmi srdečne. Na

konferencii bola opäť výborná atmosféra, skvelá matematika a srdečné vzťahy medzi účastníkmi.

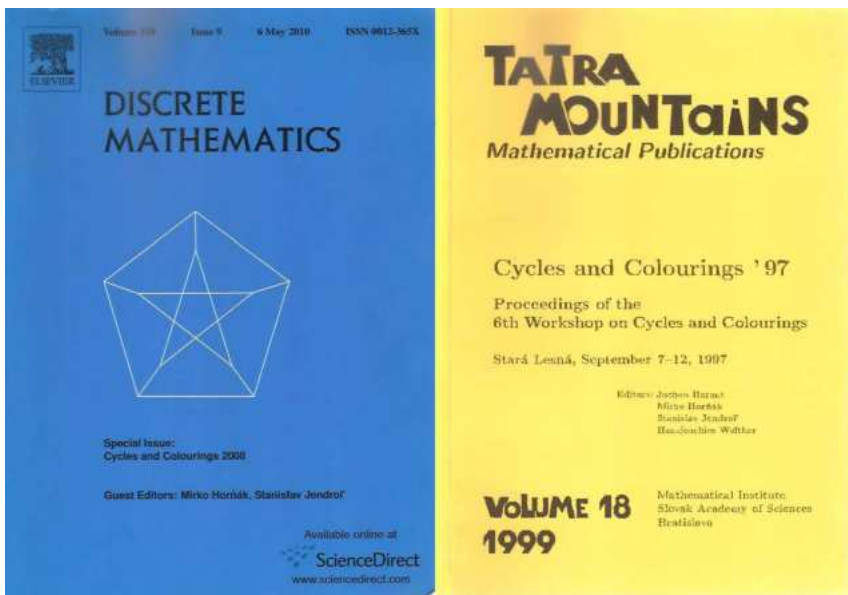
Na konferencii v Nasholime v Izraeli boli prítomní aj profesori H. Walther a J. Harant. Tam sme sa spolu dohodli, že zorganizujeme na Slovensku na jeseň 1992 nejaké spoločné nemecko-slovenské podujatie. To sa naozaj podarilo uskutočniť. V tom čase sme nemali k dispozícii ešte žiadne grantové prostriedky a ani inštitucionálne peniaze neboli dostupné v potrebnej výške, tak sme s mojím priateľom RNDr. Štefanom Schrötterom, CSc. a mojím žiakom RNDr. Michalom Tkáčom vložili do organizovania workshopu časť našich rodinných úspor. V septembri 1992 sa na Čingove uskutočnil prvý workshop, ktorý sme neskôr nazvali Cycles and Colourings (C&C). Pretože podujatie malo veľký úspech, tak sme sa ho rozhodli zopakovať aj v septembri 1993 vo Vysokých Tatrách. C&C sa odvtedy koná každoročne. Výnimkou bol len kovidový rok 2021. V r. 2024 už bude jeho 32. ročník. Vystriedalo sa na ňom veľmi veľa špičkových osobností pracujúcich v oblasti teórie grafov. Spomeňme napr. profesora P. Erdősa, jedného z najväčších svetových matematikov 20. storočia, profesora L. Lovasza, (maďarský matematik, svetová špička v oblasti diskkrétnej matematiky), Zs. Tuza, J. Pach, E. Gyori, V. T. Sós, M. Simonovics, G. O. H. Katona, Y. G. Katona, A. Gyárfás, S. Simonyi, G. Tardos, J. Bárát, C. Bujtás, Z. Furedi (všetci Maďarsko), H. Enomoto, A. Saito, M. Kano, K. Ota, K. Ozeki, K. Noguchi, A. Nakamoto (Japonsko), N. Robertson, M. Plummer, M. Jacobson, D. B. West, R. Thomas, V. Chvátal, M. Ellingham, M. Planthold, M. Rosenfeld, R. Faudree, R. Gould, M. Jacobson, G. Chen, D. W. Cranstons, F. Pfender, R. E. Jamison, L. Lesniak (všetci z USA), J. Nešetřil, M. Fiedler, Z. Ryjáček, B. Zelinka, L. Nebeský, Z. Dvořák, D. Král, J. Kratochvíl, T. Kaiser, D. Fronček (Česko), A. Rosa, Ch. C. Linder, P. Hell, G. Hahn, R. M. Wilson (Kanada); Sh. Zhu, L. Liang, Q. R. Yu (Čína), M. Borowiecki, Z. Skupień, M. Wozniak, J. Przybyło, Z. Lonc, T. Luczak, J. Grytczuk, A. Rucinski, E. Drgas-Buchardt, E. Sidorowicz, A. Fiedorowicz, H. Bielak, I. Wloch, R. Kalinowski, P. Mi-

cek, ...(Poľsko), J. Harant, H. Walther, H. Sachs, H.-J. Voss, R. Diestel, M. Eigner, D. Rautebach, G. Schaar, H. Harborth, W. Mader, M. Aigner, E. Triesch, I. Schiemeyer, A. Kemnitz, S. Ekhard, T. Zamfirescu, C. T. Zanfirescu, M. Axenovich, S. Brandstäd,...(Nemecko), B. Mohar, B. Lužar, R. Škrekovski,...(Slovinsko), M. Deza, E. Flandrin, A. J. Bondy, O. Togni, E. Sopena, F. Havet, J. S. Sereni, H. Li, S. Thomassé, R. Naserars,...(Francúzko), H. Fleischner (Rakúsko); T. Jensen, J. Bang-Jensen, B. Toft (Dánsko), E. T. Baskoro, R. Simanjuntag (Indonézia); O. Serra (Španielsko), H. Broersma, J. van den Heuvel, D. Paulusma (Holandsko); P. J. Owens, B. Jackson, K. Edwards (Veľká Británia); A. V. Kostochka, A. Kupavski, A. Mednykh, N. V. Abrosimov (Rusko), I. Broere, M. Frick, M. Henning,...(Juhoafrická republika); B. Sudakov (Švajčiarsko), S. Arumugam (India); O. Pikhurko (Ukrajina); J. Goedgeburger, G. Brinkmann (Belgicko), J. Kyppe (Fínsko), M. Miller. J. Ryan (Austrália); a veľmi veľa slovenských účastníkov, napr. M. Škoviera, R. Nedela, J. Širáň, E. Máčajová, M. Knor.



Obrázok 5: Z workshopu Cycles and Colourings, 1994. (V popredí zľava: Jochen Harant, Paul Erdős, Peter Mihók). (Foto: Stanislav Jendroľ.)

Značka C&C sa stala v grafárskom svete pojmom. Byť pozvaným prednášajúcim na C&C je dnes v grafárskom svete považované za prestíž. Z príspevkov prednesených na C&C vzniklo šesť špeciálnych čísel prestížneho medzinárodného časopisu *Discrete Mathematics*, ktoré sme s M. Horňákom pripravili ako editori. Dva zborníky (z prvých ročníkov) vyšli ako špeciálne čísla časopisu *Tatra Mountains Mathematical Publications*.



Obrázok 6: Špeciálne čísla časopisov venované workshopu C&C.

Nám C&C veľmi pomohla. Dostávali sme sa k najaktuálnejším informáciám v oblasti nášho výskumu. Doktorandi a mladí kolegovia mali a majú možnosť sa zoznámiť s rovesníkmi z celého sveta a spoznať osobne špičkové svetové osobnosti. Vďaka C&C sme rozšírili našu medzinárodnú spoluprácu. Sme pozývaní do zahraničia na pracovné pobyty či konferencie. K nám na fakultu radi chodia zahraniční kolegovia. Napríklad svetovo známi profesori H. Enomoto, Z. Skupień, H.-J. Voss a I. Schiermeyer pobudli na našich pracoviskách dlhodobo počas ich voľných semestrov na vlastné náklady. Mnohí boli na krátkodobých pracovných pobytach na na-

ších pracoviskách (okrem konferencií). Mali sme aj dvoch „postdokov“ (S. Czichacz, B. Lužar). Často k nám, za grafármi, chodievajú kolegovia z Česka, Poľska, Nemecka, Slovinska ale aj z ázijských krajín. Máme bohatu rozvinutú medzinárodnú spoluprácu s kolegami z celého sveta.

Skrátka, Košice sa neformálne stali jedným zo svetových centier, na ktorých sa pestuje kvalitná diskrétna matematika.

(Podrobnejšie sa o workshope C&C možno dočítať v článku S. Jendroľ, 20 rokov workshopu Cycles and Colourings <http://www.upjs.sk/public/media/3534/universitas-safarikiana-12-2011.pdf>). Celý článok tvorí aj prílohu tejto publikácie.

Skupinu organizátorov C&C prvých dvadsať ročníkov tvorili S. Jendroľ, Š. Schrötter, J. Harant a M. Horňák (od 2. ročníka). Pár rokov v organizačnom tíme pracovali aj P. Mihók, H. Walther, M. Tkáč, I. Fabrici a E. Hexel. Od 21. ročníka (v r. 2012) štafetu prevzali naše akademické deti a vnúčatá I. Fabrici, T. Madaras, F. Kardoš, M. Mockovčiaková, M. Maceková na čele s R. Sotákom.

### *Pár slov o medzinárodnom workshope Cycles and Colourings<sup>2</sup>*

V tradičnom čase, začiatkom septembra tohto roku, sa konal jubilejný 20. ročník workshopu Cycles and Colourings (C&C). Viac ako 80 reprezentantov diskkrétnej matematiky z 15 krajín celého sveta sa zišlo v príjemnom prostredí hotela Átrium v Novom Smokovci vo Vysokých Tatrách. Workshop C&C je spoločne organizovaným podujatím skupiny (dnes oddelenia) diskkrétnej matematiky Ústavu matematických vied Prírodovedeckej fakulty UPJŠ a Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra, Institut für Mathematik, Technische Universität Ilmenau (Nemecko).

Malé jubileum je podnetom na spomínanie a hodnotenie. Už 20 rokov je C&C miestom stretávania sa matematikov

<sup>2</sup> Tento text, napísaný prof. S. Jendroľom, bol uverejnený v časopise *Universitas Šafarikiana*, ročník XXXVIII, číslo 3 – 4, 2011 pri príležitosti 20 rokov workshopu Cycles and Colourings.



z rôznych kútov zemegule, ktorí pracujú na problematike cyklov a/alebo zafarbení v grafoch. Potreba (a možnosť) kontaktovať sa s kolegami zo zahraničia sa objavila ako prirodzený dôsledok politických zmien v roku 1989. Priaznivou zhodou okolností sme pred niečo vyše dvadsiatimi rokmi, v júni 1991, zorganizovali na Zemplínskej Šírave tradičnú každoročnú česko-slovenskú konferenciu o teórii grafov. Konferencia nám poslúžila ako dobrý odrazový môstik pre naštartovanie intenzívnych medzinárodných kontaktov a spolupráce. Naša grafárska skupina bola v tom čase, vďaka dlhodobej práci profesora Ernesta Jucoviča, značne silná a vcelku aj známa vo svete. Na konferenciu sme pozvali našich dlhoročných spolupracovníkov z Poľska, Mięczysława (Mietka) Borowieckiego a Zdzisława (Zdzicha) Skupieña. (Moji priatelia a kolegovia, ak budú čítať tento text, mi zaiste odpustia vynechanie titulov, ktoré sa s postupom času môžu meniť; vo väčšine prípadov ide o profesorov.) Pozvánku sme tiež poslali do nemeckého Ilmenau nášmu kolegovi (a budúcemu dobrému priateľovi) Hansjoachimovi (Hanjovi) Waltherovi, s ktorým sme dovtedy udržiavali sporadické písomné kontakty. On bol v tom čase zaangažovaný vo vysokej politike. Bol jedným zo štyroch ministrov, občanov bývalej NDR, ktorí pracovali vo vláde kancelára Helmutha Kohla, prvej po historickom zjednotení Nemecka. Boli sme milo prekvapení, keď sa na konferencii objavili až štyria kolegovia z Ilmenau, Hanjo Walther, Jochen Harant, Erhard Hexel a Margit Voigt. Prišli na veľkom ministerskom Volve (vraj bez „papierov“). Konferencia prebehla vo veľmi príjemnej priateľskej atmosfére, ktorá umocnila vysokú odbornú úroveň podujatia.

Naši nemeckí hostia odchádzali domov s veľmi dobrými pocitmi a dojmami. Ukázalo sa, že odborné záujmy nemeckej skupiny okolo Hanja Walthera a našej grafárskej skupiny sú veľmi blízke. Toto zistenie bolo základom pre našu neustále sa rozvíjajúcu vedeckú spoluprácu.

Ďalšou udalosťou, ktorá ma motivovala ešte intenzívnejšie rozmýšľať o tom, ako sa stretávať s kolegami zo zahraničia, bola konferencia o intuitívnej geometrii v maďarskom Szege-

de koncom leta 1991, na ktorej som sa zúčastnil. Bola to prvá väčšia konferencia, na ktorej sa slobodne mohli stretnúť kolegovia z Východu a Západu, ktorí o sebe vedeli vďaka matematike. Pre mňa osobne to bola zvlášť úspešná konferencia. Okrem toho, že mojim výsledkom sa tam dostalo veľkého záujmu, som sa tam osobne stretol s mnohými kolegami, s ktorými som si občas písal a vymieňal separáty. Jedným spomedzi nich bol Joseph Zaks z Izraela, ktorý súbežne s nami a ilmenauskými kolegami študoval kombinatorické vlastnosti konvexných mnohostenov. Od prvého okamihu sme si padli do oka a mali si veľa čo povedať. Joseph Zaks v tom čase spoluorganizoval geometrickú konferenciu v izraelskom Nahsholime, na ktorú ma pozval. Keďže pozvanie prišlo aj pre Hanja Walthera a Jochena Haranta, zišli sme sa opäť v marci 1992, tentoraz v ďalekom zahraničí. Stretnutie to bolo zasa vydarené, plné nádejného optimizmu. S kolegami z Ilmenau sme sa na ňom dohodli, že na Slovensku na jeseň toho istého roku zorganizujeme spoločný workshop.

V tom čase sme nemali k dispozícii ešte žiadne grantové prostriedky a aj inštitucionálne peniaze boli pre nás takmer nedostupné, a tak sme spolu s mojím priateľom Štefanom Schrötterom a mojím žiakom Michalom Tkáčom vložili do organizácie workshopu časť našich rodinných úspor. Na naše šťastie nemeckí kolegovia nám doniesli zvýšené vložné, preto sme nakoniec workshop finančne zvládli.

Historicky prvý nami organizovaný workshop sa konal v školskom zariadení na Čingove v septembri 1992. Nazvali sme ho Cycles and Colourings, a to podľa hlavných tém, na ktorých sme chceli pracovať. Okrem mojich košických kolegov, Martina Knora z Bratislavy a štyroch ilmenauských kolegov (Jochen Harant, Michael Stiebitz, Thomas Böhme, Margit Voigt) sa workshopu zúčastnili už vtedy medzinárodne známy talentovaný mladý maďarský matematik Zsolt Tuza, Zdzich Skupień a Peter Owens z Anglicka. Po odbornej stránke sa štvordňový workshop vydaril nad naše očakávania. Získali sme zopár nových výsledkov a rozpracovali viaceré nové problémy. „Podaril“ sa nám však aj výlet na najznámejšie

vyhliadkové miesto v Slovenskom raji. Viedla ho naša Katka Cechlárová. Po prekonaní Prielomu Hornádu sme minuli odbočku na Tomášovský výhľad, a tak namiesto krátkej najvyššej dvojhodinovej prechádzky sme absolvovali niekoľkohodinovú túru až na Kláštorisko s návratom späť na Čingov až za šera. Nemožno sa teda čudovať tomu, že tento výlet sa zapísal do histórie ako Katkastrofa. Pamätným sa stal výrok jedného z výletníkov, Petra Owensa: „It seems this river becomes a cycle“. V náročných úsekoch Prielomu Hornádu nebolo všetko jedno kolegovi, ktorý výlet absolvoval v poltopánkach a s dlhým (nerozložiteľným) dáždnikom; zdá sa však, že práve on spomína na Katkastrofu najradšej. Až po rokoch sme sa dozvedeli, že najmenej dvaja z účastníkov Katkastrofy prišli kvôli nej o nechty na nohách. Jeden z nich bol totiž členom ad hoc vytvorenej high speed group, ktorá bola vyslaná urýchlene poprosiť personál našej chaty, aby na nás počkal s večerou. (Mobilné telefóny sme nemali...) Pracovná i spoločenská atmosféra bola počas workshopu taká jedinečná a úžasná, že sme sa rozhodli stretnúť sa o rok znova.

Druhý ročník C&C sme už zorganizovali vo Vysokých Tatrách. Boli sme na chate Vodár v Novom Smokovci. Keďže chýr o atmosfére čingovského workshopu i o Katkastrofe sa široko rozniesol, záujem o účasť na C&C prejavili aj ďalší kolegovia, a to nielen zo Slovenska, ale i zo zahraničia. Zišlo sa nás spolu 37 a pekne sa nám to celé rozbehlo. Vykryštalizovala sa skupina organizátorov. Okrem mňa, Štefana Schrötera a Michala Tkáča sa do príprav podujatia zapojili Mirko Hornák, Peter Mihók a aj nemeckí kolegovia Hanjo Walther a Jochen Harant. V neskorších rokoch sa k nám pridali Igor Fabrici a z rôznych dôvodov odišli Michal Tkáč a Peter Mihók. Hanja Walthera, ktorý zomrel v januári 2005, nahradil Erhard Hexel.

Ďalších (a veľmi pekných) desať ročníkov sa konalo v Starej Lesnej v hoteli Bank (neskôr premenovanom na Euro). Odborná úroveň bola stále vysoká, atmosféra veľmi priateľská a žičlivá a počet účastníkov osciloval okolo 50. Vznikali nové spoločné práce i nové priateľstvá. V roku 2004 sme sa s work-

shopom presťahovali do Tatranskej Štrby, aby sme mohli obdivovať aj iné končiny našich veľhôr. Až do roku 2010 nás prichýlil hotel Meander so svojím veľmi príjemným, doslova domácky pôsobiacim prostredím.

Možno konštatovať, že účasť na C&C podnietila viacerých našich kolegov a priateľov, aby sa pustili do organizovania podobných podujatí. V podstate paralelne s naším workshopom funguje workshop „3in1“, ktorý usporadúvajú každoročne v novembri Zdzich Skupień a jeho žiaci. Mietek Borowiecki o čosi neskôr rozbehol workshop Colourings, Independence and Domination (CID), ktorého periodicitu sa ustálila na dvoch rokoch a koná sa v nepárnych rokoch koncom septembra. Nemeckí kolegovia začali organizovať, hoci (zatiaľ?) nie celkom pravidelne, marcové konferencie neďaleko od svojho univerzitného mestečka Ilmenau, ktoré je situované v nádhernej prírode Durínskeho lesa. Ingo Schiermeyer z nemeckého Freibergu organizuje už 15 rokov väčšinou v máji v Saskom Švajčiarsku workshop Cycles, Colourings, Cliques, Claws and Closures (C5). Mietek Borowiecki, Juhoafričan Izak Broere a Peter Mihók založili vedecký klub Hereditarnia, združujúci grafárov pracujúcich na dedičných vlastnostiach grafov. Klub organizuje svoje stretnutia každoročne v rôznych krajinách (jedna Hereditarnia sa konala aj v Juhoafrickej republike). Aby sme zabezpečili vysokú vedeckú úroveň workshopu, začali sme naň ako prednášateľov pozývať špičkových svetových odborníkov pracujúcich v teórii grafov na problematike kružníc a zafarbení. Celkový počet pozvaných dosiahol 92, pričom niektorí prednášajúci boli pozvaní po rokoch aj opakovane. O každom z pozvaných a jeho/jej účinkovaní na C&C by sa dal napísať pekný príbeh, z priestorových dôvodov však spomeniem len zopár z nich.

O účasť na C&C prejavil v roku 1994 záujem jeden z najväčších svetových matematikov 20. storočia, Paul Erdős (uncle Paul), svetoobčan, držiteľ cestovných pasov Maďarska, USA a Izraela, autor či spoluautor takmer 2 000 vedeckých prác. Na našu radosť ho k nám poslali maďarskí kolegovia. (Nám ani len nenapadlo, že by sme mu mohli poslať pozvánku.) S

menom uncle Paula je v matematickej komunite spojené Erdősovo číslo, vyjadrujúce (do istej miery) kvalitu jeho nositeľa. (Číslo 0 patrí samotnému Erdősovi, číslo 1 majú Erdősovi spoluautori, číslo 2 spoluautori nositeľov Erdősovho čísla 1 atď.) Viacerí z nás Košičanov sa môžu pochváliť hodnotným Erdősovým číslom. Ďalší z našich hostí, maďarský matematik László Lovász (na C&C prednášal v roku 1996), je známy asi každému aspoň trochu rozhládenému reprezentantovi nášho vedného odboru vo svete. Táto osobnosť z absolútnej svetovej špičky a s veľmi širokým odborným záberom je momentálne prezidentom Svetovej matematickej únie IMU. V roku 1998 bol naším pozvaným rečníkom Američan Neil Robertson, autor, resp. spoluautor mnohých zásadných poznatkov o štruktúre grafov a o vnoreniach grafov do plôch. Mnohí z našich hostí boli alebo sa medzičasom stali redaktormi či priamo šéfredaktormi popredných svetových odborných periodík, ako napr. Hikoe Enomoto, Akira Saito, Mikio Kano (Japonsko), Robin Thomas, Douglas West (USA), Pavol Hell (Kanada), Wolfgang Mader, Horst Sachs (Nemecko), Bojan Mohar (Slovinsko), Mietek Borowiecki (Poľsko), Matthias Kriesell (Dánsko), Michel Deza (Francúzsko), Jaroslav Nešetřil (Česko).

Dnes, po 20. ročníku, môžeme smelo konštatovať, že značka C&C, High Tatra, Slovakia, je synonymom špičkovej svetovej konferencie. (Na označení workshop zotrávame viacmenej len z dôvodov tradície.) Chodievajú na ňu kolegovia z celého sveta. Ak si čitateľ podrobne pozrie našu webovú stránku <https://candc.upjs.sk/>, zistí, že sme mali hostí z USA, Kanady, Indie, Číny, Indonézie, Austrálie, Juhoafrickej republiky, Iránu, Kuvajtu a takmer zo všetkých stredo a západoeurópskych krajín. Naša konferencia sa pravidelne objavuje v zozname najprestížnejších svetových konferencií týkajúcich sa kombinatorickej matematiky, pozri Link to Combinatorial Conferences, ktorý sa nachádza na webovej stránke [www.math.uiuc.edu/~west/meetlist.html](http://www.math.uiuc.edu/~west/meetlist.html).

Veľmi významného uznania sa nám dostalo v roku 1998, keď nám vtedajší šéfredaktor špičkového impaktovaného ča-

sopisu *Discrete Mathematics*, dnes už nebohý Peter Hammer, ponúkol možnosť uverejniť vybrané práce z nášho workshopu v špeciálnom čísle svojho časopisu. Odvtedy nám vyšlo päť takýchto čísel. Práce na šiestom, ktoré bude venované tohtoročnému C&C (ale aj dvadsaťročnému jubileu workshopu), sa práve začali. Okrem toho sme vydali dva zborníky z workshopu C&C ako špeciálne čísla slovenského matematického časopisu *Tatra Mountains Mathematical Publications*.

Možno si položiť otázku: *Čo táto konferencia priniesla nám, našej odbornej skupine, našim doktorandom, našej fakulte, našej univerzite, Slovensku, ...?* C&C nám prinášala a stále prináša najnovšie informácie o dianí v oblastiach teórie grafov, v ktorých pracujeme. Umožnila mojej generácii košických grafárov i našim mladším kolegom či doktorandom spoznať sa a nadviazať spoluprácu s poprednými matematikmi a mladými kolegami z celého sveta, ale aj zistiť, že svetové matematické špičky sú väčšinou skromní, príjemní ľudia, ochotní rozprávať sa s každým, a to bez ohľadu na vek. Nadviazali sme trvalé priateľské vzťahy s celým radom matematikov z rozličných krajín. Svet vie o našej matematike. Košice (a naša univerzita) sa stali jedným z uznávaných celosvetových centier výskumu v teórii grafov. Sme žiadaní o spoluprácu, pozývajú nás tiež byť hlavnými rečníkmi na zahraničných konferenciách. Mňa osobne veľmi teší, že aj naše akademické deti už idú samostatne cestou úspešnej medzinárodnej spolupráce. Vidím v tom záruku pokračovania v tradíciách kvalitnej diskkrétnej matematiky v Košiciach a špeciálne na našej alma mater aj v budúcnosti. Nezanedbateľnou je aj skutočnosť, že mnohí hostia vďaka C&C objavili a spoznali Slovensko a radi sa sem vracajú.

Pred pár rokmi sa mi dostalo vysokého ocenenia od významného akademického funkcionára našej univerzity. Spýtal sa ma: „Stano, povedz, ako to ty robíš? Ani nepiješ, a predsa ľudia za tebou a za tvojimi ľuďmi chodia a pozývajú vás do sveta.“ Priznám sa, že ma táto otázka zaskočila. Mám na ňu jedinú odpoveď: „*Pán Boh mi pomáha.*“ Mám okolo seba veľmi veľa dobrých ľudí, sme výborný tím. Každý náš hosť

má pre nás rovnakú váhu. Nerozlišujeme dôležitých a ešte dôležitejších hostí. Na našich workshopoch C&C sa rokmi vytvorili zvyklosti, atmosféra a isté rituály, na ktoré sa účastníci vopred tešia. Aj preto sa ich ľudia často a radi zúčastňujú. Napríklad viac ako 120 kolegov sa workshopu C&C zúčastnilo aspoň 3-krát, 70 aspoň 5-krát a 28 aspoň 10-krát. Spolu 343 rôznych osôb tak predstavuje celkový počet 1 125 účastníkov.

Náš workshop má svoje logo, ktoré symbolizuje jednak naše vedecké záujmy, jednak tatranské štíty. Máme Hymnu teórie grafov (vznikla počas jednej z česko-slovenských konferencií o teórii grafov a my sme si ju na C&C „osvojili“), ktorej hlboký zmysluplný text bol preložený do 15 jazykov. Ňou náš workshop začíname i končíme. Každoročne reprezentanti jednotlivých zúčastnených krajín na záverečnom večierku spievajú pesničky zo svojich krajín vo svojom rodnom jazyku. Poľskí a nemeckí kolegovia si dokonca vytvorili a nosia so sebou na túto príležitosť vlastné spevníky s textami pesničiek. Je úžasné pozorovať, ako účastníci veľavravnou gestikuláciou tlmočia do posunkovej reči texty slovenských pesničiek Pásol Jano tri voly (vdáka manželke Petra Owensa existuje dokonca v anglickej verzii John has kept three oxen) či Martine, Martine, čo ti otec kúpil v Žiline, ako celá konferencia vstáva do pozoru a salutuje pri českej pesničke Za císaře pána, ako sa sála, v ktorej sa koná welcome či farewell party, mení na fitness centrum, keď hostia robia drepy v rytme nemeckej pesničky Laurencia. Veľmi dojímavo pôsobí polnočné spievanie slovenskej ľudovej Na Kráľovej holi, keď sa prítomní (naposledy včítane Japoncov) pochyťajú okolo pliec, rozostavia do polkruhu (alebo inej zovretej formácie) a majestátne sa pohybujú v rytme piesne doľava a doprava.

Na C&C bol vyvinutý špeciálny **Face Colouring Algorithm**. (Pre „nezasvätených“ treba uviesť, že face colouring je bežný pojem chromatickej teórie grafov, keď sa farbía krajiny na politickej mape alebo, ekvivalentne, steny = faces mnohostenu.) Ten začína fungovať počas pondelkovej welcome party. Pokračuje potom počas tradičného stredajšieho výletu do tatranských kopcov, keď po horských chodníkoch kráčajú, po-

tkýnajú sa a trápia (najmä pri návrate) hostia z rôznych krajín a rôznych vekových kategórií. Pritom sa debatuje, rieši sa aj matematika, politika, kultúra. Ale, a to je hlavné, tatranské slniečko a horský vetrík farbía tváre. Algoritmus končí svoju činnosť počas farewell party, keď tváre menia farbu vplyvom kvalitných slovenských vín.

V tomto roku sme sa (kvôli malej kapacite prednáškových priestorov v hoteli Meander) presunuli do hotela Átrium v Novom Smokovci. Pozvanie predniesť hlavné prednášky prijalo sedem špičkových osobností svetovej kombinatorickej matematiky: Jaroslav Nešetřil, Hao Li (Francúzsko), Matthias Kriesell, Pavol Hell, Katsuhiko Ota (Japonsko), Zdzich Skupień a Zsolt Tuza. Zsolt Tuza, ktorý sa zúčastnil všetkých doterajších ročníkov C&C, nám na začiatku svojej prednášky zložil veľký kompliment. Povedal, že je síce častým účastníkom najrozličnejších konferencií, ale na žiadnej nie je taká podnetná, tvorivá a ľudsky teplá spoločenská atmosféra ako na našom workshope. Toto nás a našich žiakov zaväzuje ďalej rozvíjať a udržiavať tradíciu workshopov Cycles and Colou-rings.

#### 1.3.4 KKM – Konferencia košických matematikov

Prvotnú myšlienku vzniku Konferencie košických matematikov v Herľanoch by sme mohli hľadať niekde v druhej polovici 90-tych rokov 20. storočia. Vtedy som bol zvolený za predsedu Košickej pobočky Jednoty slovenských matematikov a fyzikov. Tak som dostal šancu podieľať sa na rozvoji matematiky v Košiciach organizovaním rôznych aktivít, užitočných pre ľudí živiacich sa matematikou v rôznych oblastiach spoločenského života. Snaha o organizovanie spoločných celokošických podujatí sa stretávala s veľmi malým záujmom. Kolegovia po celodennej práci v školách, na univerzitách, na Matematickom ústave SAV, či v rôznych firmách sa ponáhľali domov, k svojim rodinám či za ďalšími povinnosťami. Na druhej strane viacerí vedúci košických matematických pracovísk sa vtedy na mňa obracali so žiadosťami o po-



moc pri obsadzovaní pracovných miest na ich pracoviskách schopnými ľuďmi. Tak mi napadla myšlienka organizovať aspoň raz ročne viacdnňové stretnutie – konferenciu – v blízkom okolí Košíc, na ktorej by sme sa mohli stretávať. Tu by si mohli vyberať svojich budúcich kolegov spomínaní šéfovia. Snaha bola spopularizovať aj košické matematické osobnosti ako aj pozvať zaujímavých odborníkov z mimo košických pracovísk. A samozrejme, dať priestor mladým kolegom na prezentáciu sa. Všetko, čo sme robili, bolo súčasťou širšej koncepcie Ako vychovávať talenty, ako podnietiť mladých začínajúcich vedcov, a ako zlepšiť spoluprácu medzi matematikmi v Košiciach. Chceli sme, v spolupráci s ďalšími kolegami, vytvoriť miesto, kde by sa ľudia z Košíc a z blízkeho okolia (Prešov, Michalovce), ktorí sa živia matematikou, mohli stretávať a diskutovať o matematike. Išlo o ľudí, ktorí pracovali ako učitelia na školách alebo v matematickom ústave, alebo boli z praxe, napr. pracujúcich v počítačových firmách, vo Východoslovenských železiarňach (dnes US Steel). V tom čase vedúci košických vysokoškolských pracovísk z Technickej univerzity, UPJŠ spolu s MÚ SAV (Štefan Černák, Ján Plávka, Marián Klešč, Vierka Myslivcová, Roman Frič, ja a viacerí ďalší ) už veľmi dobre spolupracovali.

Od začiatku 90-tych rokov som pravidelne zvolával stretnutia profesorov matematiky aj vedúcich matematických pracovísk vysokých škôl, ale aj riaditeľov niektorých gymnázií. To bola prvotná myšlienka, ktorá predchádzala vzniku Konferencie košických matematikov. Nevyhovovali nám jednodvojhodinové stretnutia v Košiciach, preto sme rozmýšľali nad tým, aby tieto stretávania boli mimo Košíc. Častým znakom týchto stretnutí v Košiciach bola ich krátkosť. Zdalo sa nám lepšie začať sa stretávať mimo pracoviska, kde by bolo viac času podebatovať, aby sa odstránil každodenný stres a ostych, aby sme mohli diskutovať bez zábran voľnejšie a slobodnejšie. Druhým motívom, nemenej dôležitým, bolo dať priestor mladým účastníkom našich seminárov, začínajúcim vedeckým pracovníkom, doktorandom. Všimol som si, a bolo to aj pochopiteľné, že v prípade, keď mladí mali svoje vý-

sledky prezentovať na konferenciách, mali trému, možno až strach, nevedeli ako povedať v krátkom čase to podstatné. Potreba riešiť uvedené problémy začínajúcich výskumníkov pramenili aj z mojej vlastnej skúsenosti a mojich vedeckých začiatkov. Sám som nemal na začiatku nikoho, kto by mi poradil a nevedel som ako sa na takú konferenciu mám pripraviť. Ukázalo sa, že nová konferencia môže byť takou dobrou formou prvej prezentácie mladých vedcov, na verejnom podujatí mimo univerzity.

Na konferencii sme vytvorili samostatnú sekciu, vždy to bolo vo štvrtok celý deň, keď mohli začínajúci výskumníci prezentovať svoje doterajšie úspechy. Tak sa nám podarilo objaviť viacero šikovných mladých ľudí (dnes už uznávaní vedci ako sú profesori I. Podlubný, T. Madaras, G. Semanišin, O. Hutník, I. Žežula, S. Krajči, docenti R. Soták, M. Hančová, J. Kiselák, A. Feňovčíková, či G. Jirásková, B. Baculíková, J. Pocs). Ďalšia vec bola, že napr. Košická teória vyučovania matematiky nemala dostatočne veľký medzinárodný rozmer, chceli sme, aby aspoň v národnom kontexte sa mohli ľudia zaoberajúci sa touto problematikou stretnúť s vedeckými špičkami, ktoré by boli k ním jazykovo blízke. Na konferencii prednášali, napr. známi autori uznávaných učebníc pre základné školy - profesori J. Šedivý, K. Kuřina, J. Kopka, M. Koman, Z. Kubáček, ktorí hovorili o problematike a vytváraní učebníc na Slovensku a v Čechách. Pozvané prednášky prijali aj významní profesori z teórie vyučovania matematiky J. Doboš, A. Plocki, M. Demlová, E. Pelantová a P. Zlatoš. Veľký priestor sme venovali aj spôsobu a metódam prípravy mládeže na rôzne matematické súťaže - matematickú olympiádu, korešpondenčné semináre. O tejto téme na KKM hovoril doc. V. Bálint trikrát. Myslím si, že jednotlivé ročníky konferencie boli vynikajúce nielen po stránke obsahovej ale aj spoločenskej. Niektoré ročníky konferencie boli zamerané na výročia, napr. výročie vzniku matematického gymnázia na Poštovej, výročie vzniku Prírodovedeckej fakulty UPJŠ, na jubileá niektorých fakúlt Technickej univerzity, ale aj rôzne životné jubileá. Bolo šťastím, že Technická univerzita sa spolu

s našim pracoviskom podieľala na organizovaní jednotlivých ročníkoch konferencie, lebo vytvárala na svojom pracovisku v Herľanoch skvelé podmienky.

Samozrejme bolo to aj o ľuďoch, ktorí sa o uvedené pracovisko starali. Určite musím spomenúť p. Sabatkovú, ktorá šéfovala danému zariadeniu. Bola to spriaznená úprimná duša, s ktorou sme veľmi dobre vychádzali, dalo sa s ňou vždy dohodnúť a mala pochopenie pre naše požiadavky. Tak sa nám vždy podarilo vytvoriť vhodné podmienky na to, aby sme si mohli posediť, porozprávať a hľadať riešenia aktuálnych problémov. Keď sa pozerám na sumárne čísla a vidím, že sa na 22 ročníkoch zúčastnilo 950 ľudí, samozrejme niektorí boli aj viackrát, aj tak môžeme konštatovať, že konferencia bola a je úspešná. Vždy vie ponúknuť účastníkom niečo nové, práve to čo hľadajú. Pevne verím, že súčasní organizátori, najmä RNDr. E. Fecková Škrabuláková a doc. A. Feňovčíková sú veľmi šikovné, budú úspešne pokračovať v ďalších ročníkoch KKM. Samozrejme bude sa môcť aj naďalej na mňa spoľahnúť, hlavne radami a pomocou pri zabezpečení pozvaných prednášateľov. Napríklad pri 21. ročníku som oslovil prof. Michala Křížeka, ktorý vystúpil s prednáškou *The magic of numbers: From great discoveries in number theory to applications*.

Konferencia bola aj je o hľadaní talentov, spomínam si hneď na 1. ročník (17. – 18. apríl 1998) na jedného veľmi skromného ukrajinského chlapca Igora Podlubného, ktorý v tom čase pôsobil na FBERG TU v Košiciach. Pozvali sme ho na konferenciu na odporúčanie vedúceho Katedry matematiky SvF TU v Košiciach doc. RNDr. Štefana Černáka, CSc. Mal nádhernú prednášku *História, teória a aplikácie derivácií neločíselného rádu*, a vďaka aj môjmu odporúčeniu mal neskôr pozvanú prednášku na Konferencii slovenských matematikov v Jasnej pod Chopkom, kde zažiaril a očaril aj „bratislavských“ matematikov. Stala sa z neho neskôr osobnosť, veľmi známa nielen v slovenskej matematickej komunite.

Prostredie, kde sme sa rozhodli usporadúvať Konferencie košických matematikov bolo veľmi inšpirujúce a veľmi žičlivé, a preto sme sa rozhodli usporiadať tam aj iné podobné konfe-

rencie, napr. Československú konferenciu o teórii grafov, Medzinárodný seminár o ohodnocovaní grafov (IWOGL 2005). Mladí doktorandi sa vždy veľmi tešili na dané podujatia a stále ho spestrili aj hudobným programom v podvečerných hodinách, kde sa rozprúdili rozhovory nielen o odborných matematických témach ale všeobecne o postavení matematiky, vyučovaní matematiky a jej hodnotení v rámci vedných odborov. Snažili sme sa naviazať pozvaných prednášateľov na mladých doktorandov. Tí sa mladých vedcov pýtali na ich oblasť záujmu, zaujímal sa čo robia a veľakrát im pomohli v smerovaní a dobrými radami v ich ďalšom rozvoji. Bolo to často aj opačne, pamätám si na prof. O. Šedivého, ten bol stále obkolesený učiteľmi, ktorí sa ho nestále na niečo pýtali.

Samotná konferencia nebola v žiadnom ročníku monomatematicky orientovaná, lebo snahou bolo ukázať rôznorodosť matematiky a umožniť, aby sa mohli stretnúť ľudia z rôznych jej oblastí. V každom ročníku sme sa snažili nájsť takých ľudí, ktorí by dokázali svojou prednáškou zaujať. Naším zámerom bolo stretnutie ľudí z okolia Košíc ale aj širšieho okolia, ktorí sa živia matematikou alebo sa ňou zaoberajú. Prevažne išlo o ľudí, ktorí matematiku študujú alebo študovali, alebo ich silne motivovala v ich živote a práve pre nich sme sa snažili vyberať zaujímavé a pútavé príspevky. Každý január sa zišiel organizačný výbor konferencie a dohodol sa na pozvaných prednášateľoch na konferencii. Vždy to boli pracoviská matematiky z Technickej univerzity (z rôznych fakúlt - Stavebná fakulta, FBERG, Fakulta elektrotechniky a informatiky) a pracoviská matematiky z Prírodovedeckej fakulty UPJŠ a zástupcovia Detašovaného pracoviska MÚ SAV v Košiciach. S organizáciou pomáhali a zúčastňovali sa aj učitelia z gymnázií najmä Gymnázium na Poštovej v Košiciach (M. Ružička), Gymnázium Alejová v Košiciach, Gymnázium P. Horova v Michalovciach (J. Novák, A. Hnát). Vždy sa prijímali rozhodnutia spoločne a nie individuálne. Cieľom bolo, aby pozvaní prednášatelia neboli len matematici, ale aj zástupcovia z rôznych iných oblastí, ktoré využívajú matematiku vo svojej práci - ekonómovia, psychológovia, fyzici, učitelia...Podobne

aj názov konferencie vznikol spontánne a bol odvodený od jej obsahu a účastníkov, ktorí na ňu pravidelne chodili prevažne z Košíc. Práve Herľany boli ideálnym miestom z dvoch dôvodov. Pracovisko patrilo pod Technickú univerzitu, preto sa dala daná konferencia zorganizovať za nízke náklady a druhý dôvod bol ten, že boli dostatočne blízko, aby sme sa tam dostali ľahko z Košíc, ale dostatočne ďaleko, aby ľudia na noc neutekali domov. Radšej zostali a diskutovali a vzájomne konverzovali o matematike a oblastiach, ktoré ich zaujímali.

Daril sa nám aj zámer mať ako hostí na KKM známe osobnosti slovenskej matematiky reprezentujúce jej vedné oblasti pestované na Slovensku. Už sme spomínali expertov z teórie vyučovania matematiky. Aj zoznam ostatných je úctyhodný. Profesori M. Bača, P. Brunovský, L. Bukovský, K. Cechlárová, A. Dvurečenskij, V. Geffert, M. Horňák, M. Haviar, R. Jajcay, M. Knor, B. Riečan, M. Saniga, J. Širáň, G. Wimmer. Mali sme aj zaujímavých prednášajúcich z Česka (J. Demel, M. Fiedler, M. Křížek a K. Zimmermann), z Nemecka (A. Kemnitz, I. Schiermeyer), z Poľska (W. Foryś, J. Przybyło) a z Maďarska (A. Recki).

Myslím, že budúcnosť konferencie je vo veľmi dobrých rukách, lebo Erika Fecková Škrabuláková je veľmi akčná a určite sa jej spolu s Jánom Bušom, Andreou Feňovčíkovou a ďalšími členmi výboru Košickej pobočky JSMF podarí zorganizovať mnohé úspešné ročníky Konferencie košických matematikoch v Herľanoch. Pevne verím, že myšlienka, ktorá stála pri zrode tejto konferencie je aj po viac ako 20 rokoch stále aktuálna a vďaka nej sa budú aj naďalej hľadať, usmerňovať ďalšie talenty, na ktorých bude stáť a rozvíjať sa matematika v tomto regióne v budúcnosti. Verím, že aj v budúcnosti si vedúci predstavitelia rôznych matematických pracovísk a informatických firiem všimnú a ocenia túto nenapadnú ale významnú konferenciu. V minulosti sa táto konferencia tešila priazni takých osobností košickej matematiky ako prof. RNDr. Lev Bukovský, DrSc., prof. RNDr. Igor Podlubný, DrSc., prof. RNDr. Mirko Horňák, prof. RNDr. Martin Bača, CSc.,

doc. RNDr. Roman Frič, DrSc., prof. RNDr. Katka Cechlárová, DrSc.

---

## VÝZNAMNÉ OSOBNOSTI KOŠICKEJ ŠKOLY DISKRÉTNEJ MATEMATIKY

---

*Stanislav Jendrol', Štefan Tkačik<sup>1</sup>*

Ťažiskom vedecko-výskumného zamerania školy bolo a aj je štúdium kombinatorických vlastností diskretných štruktúr, najmä štruktúry a chromatických vlastností grafov (rovinných, resp. vnorených do plôch), problematiky grafových ohodnotení a problematiky dlhých cyklov v grafoch.



Cena primátora mesta Košice, 2002.

---

<sup>1</sup> Spracované na základe podkladov vyžiadaných od jednotlivých osobností, údajov vedeckých databáz Scopus, Web of Science, MathSciNet(AMS) a zbMATH

O kvalite vedca hovoria, okrem obsahu práce, aj viaceré scientometrické údaje ako sú počty jeho publikácií v popredných svetových vedeckých časopisoch, počty kníh ktoré napísal, a ktoré vyšli vo svetoznámych vydavateľstvách, a pod. Ďalej sú to počty citácií prác autora v monografiách či vo vedeckých článkoch iných autorov uverejnených popredných vedeckých časopisoch. Záznamy o takých citáciách v súčasnosti uverejňujú špeciálne databázy. Najznámejšie sú SCOPUS a Web Of Science (WoS). V matematike takým účelom slúžia aj databázy MatSciNet a zbMATH. V súčasnosti je široko používaný Hirschov  $h$ -index. Je to najväčšie prirodzené číslo  $h$  také, že aspoň  $h$  prác vedca je citovaných aspoň  $h$ -krát v prácach iných autorov pričom autorské kolektívy citovanej a citujúcej práce neobsahujú žiadne spoločné meno (t. j. sú disjunktné).

V diskkrétnej matematike je obľúbenou mierou kvality matematika aj tzv. **Erdősovo číslo**. Pál Erdős patril k absolútnej svetovej špičke matematikov 20. storočia. Napísal viac ako 1550 vedeckých prác s veľkým množstvom spolupracovníkov. Na jeho počesť je pomenované číslo  $k$ , ktoré má nasledujúce vlastnosti: Samotný Erdős má Erdősovo číslo 0. Erdősovo číslo 1 má matematik, ktorý má spoločnú prácu s prof. Erdősom, Erdősovo číslo 2 má matematik, ktorý má spoločnú prácu s matematikom, ktorý má Erdősovo číslo 1, Erdősovo číslo 3 má matematik, ktorý má spoločnú prácu s matematikom, ktorý má Erdősovo číslo 2, atď. Čím matematik má menšie Erdősovo číslo, tým je považovaný za kvalitnejšieho.

Do Košickej školy diskkrétnej matematiky zaraďujeme každého matematika, ktorý svoju dizertačnú (PhD. alebo predtým CSc.) prácu napísal pod vedením prof. Jucoviča alebo pod vedením niektorého z jeho akademických nasledovníkov, t. j. jeho akademických detí, vnúčat, atď. Matematici Košickej školy diskkrétnej matematiky majú veľmi nízke Erdősovo čísla.



Zakladajúcou osobnosťou školy bol **prof. Dr. Ernest Jucovič, DrSc.** Je absolventom Pedagogickej fakulty Karlovej univerzity v Prahe v r. 1950. Habilitoval sa v r. 1961 na Vysokkej škole technickej v Košiciach. Vedeckú hodnosť DrSc. získal v r. 1974 na Karlovej univerzite v Prahe. V r. 1977 sa inauguroval v odbore Matematika na UPJŠ v Košiciach. Na Univerzite P. J. Šafárika pracoval od r. 1959. Najprv na jej Pedagogickej fakulte v Prešove. Neskôr, od r. 1966 až do svojho odchodu do dôchodku v r. 1995, na jej Prírodovedeckej fakulte. Zomrel v r. 1998.



Prof. Ernest Jucovič.

Od svojho príchodu na UPJŠ začal organizovať vedecký seminár, v rámci ktorého by sa mohol rozbehnúť vedecký výskum. Prvými účastníkmi seminára, ktorý sa vtedy volal Kombinatorické štruktúry, boli kmeňoví pracovníci fakulty (A. Bernátová, L. Bukovský) a niektorí študenti prof. Jucoviča ako Š. Kulcsar, V. Bálint a J. Fiamčík. Neskôr sa k nim pridali pracovníci košickej techniky doc. RNDr. M. Bučko, CSc., doc. RNDr. V. Jacoš, CSc. a doc. RNDr. J. Ninčák, CSc. Dvaja posledne menovaní boli absolventi aspirantúr vo vtedajšom Sovietskom zväze. Dôležitá bola obsahová náplň seminára. Tú prof. Jucovič nenechával na náhodu. On sám už v tom čase mal určité výsledky týkajúce sa kombinatorických ale aj geometrických vlastností konvexných mnohostenov. Mal aj dobré kontakty s československými matematikmi poškľujúcimi po podobnej kombinatorickej matematike. Veľmi dobre poznal práce prof. RNDr. A. Kotziga, ktorý sa v tom čase nemohol vrátiť z rodinných dôvodov z Kanady, kde bol na dvojročnom pracovnom pobyte. (Po roku 1968 sa nebolo dobre

k nemu hlásiť). Dovtedajšie Jucovičove výsledky si všimol americký matematik, špičkový svetový geometer, B. Grünbaum. Kontaktoval prof. Jucoviča, s ktorým potom pár rokov udržiaval intenzívne pracovné (písomné) kontakty. Vďaka tomu sa k Jucovičovi dostali viaceré preprinty Grünbaumových prác ako aj jeho slávna monografia *Convex Polytopes* (1967, John Wiley & Sons, Ltd.). Tieto obsahovali celý rad otvorených problémov. Viaceré z nich boli intuitívne ľahko porozumiteľné. Pár z nich dal prof. Jucovič študentom 3. ročníka PF UPJŠ, S. Jendroľovi a M. Treklerovi, ktorých v tom čase tiež pozval do svojho seminára, na preštudovanie a referovanie. Bol to úspešný počin. V spolupráci so S. Jendroľom a M. Trenklerom sa mu podarilo pomerne rýchlo hlboko rozpracovať problematiku stenových a vrcholových vektorov konvexných mnohostenov a ich analógií aj na orientovateľných plochách rôznych od guľovej plochy. Jucovičovi sa podarilo zosilniť a zovšeobecniť (z dnešného pohľadu slávny) Kotzigov výsledok, že každý konvexný mnohosten obsahuje hranu, ktorej súčet stupňov koncových vrcholov je najviac ak 13, pričom hranica 13 je vo všeobecnosti nezmenšiteľná. Aj táto téma sa na celé roky stala veľmi úspešnou. V spolupráci s P. Mihókom a F. Olejníkom našťartovali úspešné témy zafarbení a rozkladov grafov a hypergrafov. Úspešne sa tiež rozbehlo štúdium skoro pravidelných rozkladov rovinných máp, ktoré na podnet prof. Jucoviča rozvinul M. Horňák, ďalší zo študentov fakulty, ktorého pozval do seminára už ako vysokoškolačka – prváka. V rokoch 1970 až 1990 vedecký kolektív pod vedením prof. Jucoviča úspešne vyriešil a obhájil štyri vedecké projekty štátneho vedeckého programu a rozbehol štúdium ďalších plodných tém.

Je autorom alebo spoluautorom 44 vedeckých publikácií, jednej monografie a dvoch učebníc geometrie pre pedagogické fakulty. Na jeho publikácie databáza Scopus eviduje viac ako 170 citácií.

Vedúcou osobnosťou školy v rokoch 1992 až 2021 bol **Dr.h.c. prof. RNDr. Stanislav Jendroľ, DrSc.** Je absolventom PF UPJŠ z r. 1971 v odbore Matematika. Vedeckú hodnosť CSc. získal v odbore Geometria a topológia na Prírodovedeckej fakulte UK v Bratislave v roku 1979. Docentom bol od r. 1982. V r. 1993 získal vedeckú hodnosť doktora vied DrSc. v odbore Geometria a topológia. Od r. 1994 je profesorom v odbore Matematika. Je žiakom prof. Jucoviča a skúseným vedecko-



Prof. Stanislav Jendroľ.

pedagogickým pracovníkom so širokým spektrom vedeckých záujmov. V r. 2009 bol akademickou ratingovou agentúrou ARRA označený za špičkového slovenského matematika. Ako vedec napísal (samostatne alebo so spoluautormi) viac ako 180 pôvodných vedeckých prác uverejnených prevažne v popredných svetových časopisoch. V nich popísal celý rad nových dôležitých poznatkov o rôznych geometrických, topologických a kombinatorických objektoch. Významne prispel k charakterizácii stenových a vrcholových vektorov konvexných mnohostenov a polyedrálnych máp. Ako prvý objavil príklad konvexného mnohostena s neinvolučnou autodualitou (tzv. **Jendroľov mnohosten**). Objavil (spoluautori I. Fabrici, M. Maceková, T. Madaras, M. Tuhársky, R. Soták a zahraniční kolegovia J. Harant, H.-J. Voss, H. Walther) fundamentálne poznatky o štruktúre rovinných grafov a grafov vnorených do orientovateľných plôch; tým položil základy teórie ľahkých grafov, ktorá je v súčasnosti intenzívne rozvíjaná na viacerých pracoviskách vo svete. Vyriešil problém P. Erdősa o minimálnej váhe hrany v grafoch s predpísaným poč-

tom vrcholov a hrán (spoluautori J. Ivančo a I. Schiermeyer) a jeho špecifikáciu pre súvislé grafy (spoluautori M. Horňák a I. Schiermeyer). Spolu s M. Trenklerom vyriešil problém z teoretickej chémie o možnej existencii molekúl fulleroidov s predpísanou geometrickou štruktúrou. Prispel (spoluautor F. Kardoš) k hlbšiemu poznaniu geometrickej štruktúry molekúl fullerénov a fulleroidov. Inicioval štúdium totálnych ohodnotení grafov (spoluautori M. Bača, M. Miller, J. Ryan) a objavil (spoluautori J. Ivančo, J. Miškuf a R. Soták) celý rad vlastností iregulárnych totálnych ohodnotení grafov. Publikácie venované tejto problematike našli vo svete živý ohlas; vedecké databázy evidujú na úvodnú prácu danej témy viac ako 230 citácií. V spolupráci so spoluautormi (J. Czap, I. Fabrici, J. Harant, M. Horňák, F. Kardoš, R. Soták, E. Škrabuľáková, J. Valiska, M. Voight, M. Vrbjarová) položil základy ďalšej životaschopnej problematiky – teórie faciálnych zafarbení rovinných grafov, pri ktorých obmedzenia na zafarbenie sú na stenách týchto grafov (cyklické, nepárne, nerepetitívne, totálne, s jediným maximom, nekonfliktné, bez anagramov, pakovacie, rankingové, WORM a pod.). Pod jeho vedením úspešne dokončilo 18 nositeľov vedeckého titulu PhD. resp. CSc. (sú to M. Tkáč, M. Bača, M. Klešč, I. Kohútek, T. Madaras, I. Fabrici, M. Tuhársky, F. Kardoš, J. Miškuf, D. Bruothová, E. Škrabuľáková, K. Budajová, J. Czap, P. Šugerek, M. Maceková, M. Vrbjarová, M. Timková a J. Valiska.)

Na jeho vedecké práce medzinárodné databázy evidujú viac ako 1 620 citácií podľa databázy Scopus a viac ako 2 200 podľa Research Gate. Jeho Erdősovo číslo je 2 (spoluautor prof. Zs. Tuza) a Hirshov index viac ako 24. Ním vedené vedecké tímy vynikajúcim spôsobom vyriešili 4 APVV projekty, 6 projektov VEGA, jeden projekt KEGA a 3 bilaterálne projekty. Úspešne vyriešené boli aj ďalšie projekty, v ktorých prof. Jendroľ figuroval ako spoluriešiteľ. V r. 2017 bola Košická skupina diskkrétnej matematiky (KOSDIM), v zložení prof. Jendroľ (vedúci), prof. Horňák, prof. Madaras, prof. Semanišin, doc. Soták, dr. Fabrici a dr. Maceková, Akreditačnou komisiou MŠVŠ SR ocenená titulom „Špičkový tím“ ako je-

den zo šiestich takto ocenených matematických tímov zo slovenských vysokých škôl (na roky 2017 až 2023). Za pracovné výsledky bol viac krát ocenený. Najviac si váži Veľkú medailu Svätého Gorazda za dlhoročnú prácu vo vysokom školstve (udelenú MŠVVŠ SR v r. 2014) a Zlatú medailu UPJŠ za šírenia dobrého mena UPJŠ (udelená v r. 2009). TU Ilmenau (Nemecko) mu udelila v roku 2018 titul Dr.h.c. – čestný doktorát – za dlhoročnú spoluprácu medzi UPJŠ Košice a TU Ilmenau. Ním vedený kolektív matematikov bol ocenený v r. 2002 Cenou primátora mesta Košice.

Je členom redakčnej rady poľského karentovaného časopisu *Discussiones Mathematicae Graph Theory* a časopisu *Electronic Journal of Graph Theory and Application*, ktorý vychádza v Indonézii, ako aj slovenského časopisu *Tatra Mountains Mathematical Publications*. Bližšie informácie o prof. Stanislavovi Jendroľovi nájdete v knihe [Osobnosti slovenskej matematiky, Stanislav Jendroľ, **Verbum**, 2021].

Ďalšou kľúčovou osobnosťou Košickej školy diskkrétnej matematiky je **prof. RNDr. Mirko Horňák, CSc.**, žiak prof. Jucoviča. Je absolventom PF UPJŠ v odbore Matematika v roku 1975. V roku 1983 získal vedeckú hodnosť CSc. vo vednom odbore Geometria a topológia na Matematicko-fyzikálnej fakulte Univerzity Komenského (FMFI UK) v Bratislave. Od roku 1988 bol docentom. V roku 2011 bol inaugurovaný za profesora v odbore Matematika na FMFI UK. Zapojil sa do riešenia vedeckovýskumných projektov v rámci



Prof. Mirko Horňák.

Agentúry na podporu výskumu a vývoja (APVV, 6 projektov) a v rámci Vedeckej grantovej agentúry VEGA Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky a Slovenskej akadémie vied (8 projektov, dvakrát ako zodpovedný riešiteľ). Dlhodobo úspešne spolupracoval s viacerými zahraničnými pracoviskami, predovšetkým AGH Kraków (Poľsko), TU Bergakademie Freiberg a Technical University Ilmenau (Nemecko) a Politecnico di Milano (Taliano). Bol spolugarantom, resp. prvým garantom doktorandského štúdia v študijnom programe Diskrétna matematika na PF UPJŠ. Pod jeho vedením obhájilo doktorandskú dizertačnú prácu šesť študentov tohto doktorandského štúdia (R. Soták, Š. Pčola, E. Bruoth, J. Zlámalová, Z. Kocková, S. Rindošová). Je členom redakčnej rady poľského časopisu *Discussiones Mathematicae Graph Theory* i ďalšieho poľského časopisu *Opuscula Mathematica*. Bol dlhoročným spoluorganizátorom úspešne etablovaného medzinárodného workshopu Cycles and Colourings. V roku 2018 mu bola udelená bronzová medaila PF UPJŠ.

Počas vedeckej aspirantúry sa venoval predovšetkým bunkovým rozkladom orientovateľných plôch. V neskoršom období svoj vedecký záujem presmeroval najmä na chromatickú teóriu grafov. Získal podstatné výsledky týkajúce sa cyklického chromatického čísla (spoluautori H. Enomoto, S. Jendroľ, J. Zlámalová). Inicioval štúdium niektorých chromatických invariantov ako pozorovateľnosť (spoluautori J. Černý, R. Soták) a paletový index (spoluautori R. Kalinowski, M. Meszka, M. Woźniak). Získal viacero výsledkov týkajúcich sa achromatického čísla, resp. achromatického indexu (spoluautori Š. Pčola, J. Puntigán, M. Woźniak). Zaoberal sa aj štruktúrnymi problémami teórie grafov, predovšetkým týkajúcimi sa váh hrán v grafoch (spoluautori A. Gajdoš, P. Hudák, J. Ivančo, S. Jendroľ, T. Madaras, I. Schiermeyer) a rozkladov grafov na podgrafy predpísaných vlastností (spoluautori S. Cichacz, Z. Kocková, A. Marczyk, I. Schiermeyer, M. Woźniak, Zs. Tuza). Doposiaľ publikoval 63 pôvodných vedeckých prác, v prevažnej miere v popredných medzinárodných

časopisoch ako *Journal of Graph Theory*, *Discrete Mathematics*, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, *Discrete Applied Mathematics*, *Graphs and Combinatorics*. Na tieto práce zaznamenal viac než 800 citácií, z toho 526 citácií podľa citačných indexov Web of Science a/alebo SCOPUS. Jeho  $h$ -index (bez autocitácií) dosiahol hodnotu aspoň 15, podľa citačného indexu SCOPUS aspoň 12. Jeho Erdősovo číslo je 2 (jeho spoluautormi sú Zs. Tuza a E. Győri, obaja s Erdősovým číslom 1). Bol tiež členom špičkového tímu KOSDIM pod vedením prof. Stanislava Jendroľa.

Veľmi úspešným žiakom a medzinárodne veľmi dobre známou osobnosťou Košickej školy diskkrétnej matematiky je **prof. RNDr. Martin Bača, CSc.** Svoju vedeckú hodnosť kandidáta vied, CSc., obhájil na FMFI UK v Bratislave v roku 1992. Prof. Bača bol menovaný za docenta v roku 1996 a v roku 2011 bol menovaný za profesora. Je žiakom prof. Jendroľa a doc. J. Ninčáka, CSc. Od skočenia vysokoškolského štúdia pracuje na Strojníckej fakulte Technickej univerzity v Košiciach. Je špičkovým svetovým expertom v oblasti štúdia vlastností rôznych typov grafových ohodnotení. Je autorom viac ako 166 pôvodných vedeckých prác, ktoré napísal ako autor alebo spoluautor s matematikmi z celého sveta. Podieľal sa na zavedení štúdia viacerých nových grafových invariantov, napr. štúdia totálnych vrcholovo iregulárnych síl grafov a štúdia totálnych hranovo iregulárnych síl grafov (spoluautori S. Jendroľ, M. Miller, J. Ryan), štú-



Prof. Martin Bača.

dia totálnej stenovo iregulárnej sily grafov a od nej odvodeného zafarbenia (spoluautori S. Jendroľ, K. Kathiresan, K. Muthugurupackian), modulárnych verzií hranovej, vrcholovej a totálnej iregulárnej sily (spoluautori A. Ahmad, G. Ali, M. Imran, Z. Kimáková, A. N. A. Koam, A. Semaničová-Feňovčíková, K. A. Sugeng), viacerých verzií magických či antimagických ohodnotení a lokálneho antimagického chromatického čísla (spoluautori S. Arumugam, N. Bong, P. Kovář, R. T. Lai, M. Lascsáková, Y. Lin, M. Miller, F. A. Muntaner-Batle, K. Premalata, A. Semaničová-Feňovčíková, K. A. Sugeng, T.M. Wang). Počas svojej vedeckovýskumnej práce viedol riešiteľské tímy 4 projektov VEGA a jedeného projektu KEGA a ako spoluriešiteľ sa zapojil do riešenia projektov na PF UPJŠ (4 projekty APVV) a tiež na rôznych zahraničných univerzitách, napr. Newcastle a Balarat (Austrália), Bandung a Jakarta (Indonézia), Tamil Nadu a Chennai (India), Lahore a Faisalabad (Pakistan), Taichung (Taiwan), Jazan a Riyadh (Saudská Arábia), Al Ain (Spojené Arabské Emiráty), Morrow a Georgetown (USA), Castelldefels a Barcelona (Španielsko), Ostrava, a iné. Na viacerých z týchto pracovísk sa podieľal na výchove doktorandov ako pomocný školiteľ a na Government College University, Lahore, Pakistan ako školiteľ vychoval 10 študentov doktorandského štúdia (A. Ahmad, G. Ali, F. Bashir, A. Javed, M. Naseem, M. Numan, M. K. Shafiq, M.K. Siddiqui, S. Sultan, M. A. Umar). Je členom redakčnej rady časopisu *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics* (India) a časopisu *Electronic Journal of Graph Theory and Applications* (Indonézia). Na jeho práce databáza Scopus eviduje viac ako 2 100 citácií. Jeho Hirschov  $h$ -index je 23. Jeho Erdősovo číslo je 3.

**Prof. RNDr. Tomáš Madaras, PhD.** je ďalším úspešným členom Košickej školy diskretnéj matematiky pôsobiacim na Ústave matematiky Prírodovedeckej fakulty Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach. Na spomínanej fakulte pôsobí počas celej svojej akademickej dráhy – od ukončenia vysokoškolského štúdia v odbore Matematika-matematická optimali-



zácia v r. 1995, cez obhajobu PhD. práce v r. 2001, habilitáciu v roku 2009 a inauguráciu v r. 2019. Je žiakom prof. Jendroľa. Jeho vedecké pôsobenie pretína niekoľko oblastí teórie grafov. Ťažiskovou témou jeho výskumu je štruktúra planárnych a rovinných grafov, resp. grafov, ktoré sú im geometricky príbuzné (spoluautori I. Fabrici, D. Hudák, J. Czap, Y. Suzuki), a to tak z lokálneho (existencia špecifických malých konfigurácií v grafoch), ako i z globálneho hľadiska



Prof. Tomáš Madaras.

(vlastnosti veľkých podgrafov). Ďalšie jeho práce sú venované problematike štruktúry sociálnych, resp. komplexných sietí, najmä štúdiu matematických vlastností kvantitatívnych mier dôležitosti aktérov, resp. prepojení aktérov v rámci siete (indexov centrality) a detekcie komunít v sieti (spoluautori J. Coroničová Hurajová, S. Gago). Súčasťou jeho výskumu (spoluautor P. Široczki) sú tiež špecifické možnosti reprezentácií grafov v metrických, resp. euklidovských priestoroch a zafarbenia grafov. Doposiaľ vyškoliť siedmich nositeľov titulu PhD. (D. Hudák, P. Hudák, J. Coroničová-Hurajová, P. Široczki, M. Šurimová, M. Tamášová, A. Onderko). Je autorom, resp. spoluautorom 51 vedeckých prác, ktoré väčšinou vyšli v špičkových svetových časopisoch. Databáza Scopus eviduje na jeho práce viac ako 320 citácií. Je často prizývaný k medzinárodnej spolupráci. Jeho Hirschov  $h$ -index je 13. Jeho Erdősovo číslo je 2. V ostatných rokoch je jedným z kľúčových spoluorganizátorov dobre zavedenej medzinárodnej konferencie Cycles & Colourings. Od r. 2010 je hlavným organizátorom tradičného seminára KOKOS, založeného prof.

Jucovičom pred takmer 60 rokmi. Bol tiež členom špičkového tímu KOSDIM pod vedením prof. S. Jendroľa.



Prof. Gabriel Semanišin.

**Prof. RNDr. Gabriel Semanišin, PhD.** je ďalším veľmi úspešným členom Košickej školy diskkrétnej matematiky. Je absolventom Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v odbore Teoretická kybernetika, matematická informatika a teória systémov z r. 1993. Od ukončenia štúdia pracuje na PF UPJŠ, na ktorej v r. 1998 úspešne ukončil doktorandské štúdium v odbore Diskrétna matematika. Na PF UPJŠ sa v r. 2004 habilitoval na docenta v odbore Matematika. Profesúru získal na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Komen-

ského univerzity v Bratislave v odbore Informatika v r. 2018. Je žiakom doc. RNDr. Petra Mihóka, CSc. Pod jeho vedením sa stal expertom v oblasti štúdia dedičných a aditívnych vlastností grafov, ktoré prirodzeným spôsobom zovšeobecňujú problematiku vrcholových a hranových zafarbení všeobecných grafov (spoluautori M. Borowiecki, I. Broere). Podieľal sa na vyriešení dvoch otvorených problémov z oblasti aditívnych dedičných vlastností grafov, ktoré boli sformulované v renomovanej monografii o grafových ofarbeniach. V rámci vedeckovýskumnej práce sa venuje aj rôznym problémom z oblasti algoritmickej teórie grafov, dátovej analýzy, strojového učenia a softvérového inžinierstva. V ostatnom období študuje problematiku minimálneho vrcholového pokrytia cestami (spoluautori B. Brešar, M. Jakovac, F. Kardoš, J. Katrenič, A. Taranenko), tematiku zovšeobecnení nezávislých množín

v problémoch rozvrhu a grafové problémy motivované rôznymi aspektmi komunikácií v sieťach (spoluautor F. Galčík). Bol tiež súčasťou tímu, ktorý zaviedol tento nový grafový invariant zovšeobecňujúci vrcholové pokrytie grafov, a ktorý vzbudil významný ohlas najmä pre svoj aplikačný potenciál v rôznych oblastiach. Bol tiež členom špičkového tímu KOS-DIM pod vedením prof. S. Jendroľa.

Je autorom, resp. spoluautorom aspoň 67 publikácií, z ktorých je viac ako 51 vedeckých prác, ktoré vyšli v špičkových svetových časopisoch, a na ktoré eviduje viac ako 310 citácií. Databáza Scopus eviduje na jeho práce viac ako 281 citácií. Je často prizývaný k medzinárodnej spolupráci najmä kolegami z Poľska, Slovinska, Juhoafrickej Republiky, Kanady a Nemecka. Jeho Hirschov  $h$ -index je 7. Jeho Erdősovo číslo je 2. Vychoval šiestich nositeľov titulu PhD., z toho troch v odbore Diskrétna matematika (P. Katrenič, F. Galčík, J. Katrenič).

Okrem základného výskumu sa podieľal na vývoji a implementácii Daňového informačného systému Slovenskej republiky a Akademického informačného systému AiS2, ktorý používa 17 slovenských vysokých škôl. V rokoch 2005 až 2011 bol riaditeľom Ústavu informatiky PF UPJŠ, v rokoch 2011 až 2019 zastával funkciu dekana PF UPJŠ. V rokoch 2019 až 2023 vykonával funkciu prorektora UPJŠ. V súčasnosti svoj organizačný talent uplatňuje vo funkcii prodekana PF UPJŠ.

Za svoju prácu bol už ako mladý, v r. 2000, ocenený Cenou Akademia Š. Schwarza, vyhlasovanou JSMF (1. miesto). V r. 2009 získal Cenu dekana PF UPJŠ za vedeckovýskumnú činnosť, v r. 2019 bol ocenený Cenou primátora mesta za zásluhy o rozvoj mesta Bardejov. Za mimoriadne zásluhy vo vedeckej a verejnoprospešnej činnosti v meste Košice bol v r. 2019 ocenený Cenou primátora mesta Košice.

**Doc. RNDr. Roman Soták, PhD.** je ďalším úspešným členom Košickej školy diskkrétnej matematiky pôsobiacim na Ústave matematiky Prírodovedeckej fakulty Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach. Na spomínanej fakulte



Doc. Roman Soták.

pôsobí počas celej svojej akademickej dráhy – od ukončenia vysokoškolského štúdia v odbore Teoretická kybernetika, matematická informatika a teória systémov v r. 1992 cez obhajobu PhD. práce v r. 1997 v odbore Diskrétna matematika a habilitáciu v r. 2004 v odbore Matematika. Je žiakom prof. Horňáka pod vedením ktorého získal svoj titul PhD. v r. 1997. Je tvorivým a činným členom tímu so širokým vedeckým záberom.

Spolu s M. Horňákom skúmal niekoľko typov hranových zafarbení grafov, ktoré rozlišujú vrcholy farebnými množinami a neskôr so svojou doktorandkou J. Rudášovou získal výsledky pre špecifický variant zafarbenia, v ktorom sa predpokladá rovnomerné použitie všetkých farieb. Mnohé výsledky v chromatickej teórii grafov (týkajúce sa zafarbení bez určitých dvojfarebných podgrafov) publikoval v spolupráci s ďalšou doktorandkou M. Mockovčiakovou, kolegami zo Slovinska (B. Lužar, R. Škrekovski, J. Kranjc) a ďalšími spoluautorami (F. Kardoš, D. Hudák, L. Bezegová). Podieľal sa na zovšeobecnení zlomkového a cirkulárneho zafarbenia (taktiež ich totálnej verzie) pre dedičné a aditívne vlastnosti (spoluautori P. Mihók, A. Kemnitz, M. Marangio, G. Karafová). Skúsenosti z oblasti vzdialenostných grafov, ktorým sa venoval ešte počas svojho doktorandského štúdia využil neskôr pri skúmaní dlhých kružníc v týchto grafoch (spoluautori D. Rautenbach a C. Löwenstein). Doteraz vyškolil šiestich nositeľov titulu PhD., (J. Oravcová, R. Hajduk, G. Karafová, M. Mockovčiaková, K. Sroková, Z. Šárošiová). Je autorom, resp. spoluautorom 56 vedeckých prác, ktoré vyšli v špičkových svetových časopisoch. Databáza Scopus eviduje na jeho práce viac ako 550

citácií. Je často prizývaný k medzinárodnej spolupráci najmä kolegami z Nemecka, Slovinska, Francúzska, Česka a Poľska. Jeho Hirschov  $h$ -index je 13. Jeho Erdősovo číslo je 2. Počnúc 21. ročníkom je členom organizačného výboru úspešnej medzinárodnej konferencie Cycles & Colourings. Pod jeho vedením aktuálna Košická skupina diskkrétnej matematiky vyriešila (roky 2015 – 2023) vynikajúcim spôsobom dva projekty APVV. Úspešné vyriešené boli aj ďalšie projekty, v ktorých doc. Soták figuroval ako spoluriešiteľ. Bol tiež členom špičkového tímu KOSDIM pod vedením prof. S. Jendroľa.

Okrem základného výskumu sa podieľal na vývoji a implementácii Daňového informačného systému Slovenskej republiky a Akademického informačného systému AiS2, ktorý používa 17 slovenských vysokých škôl. Doc. R. Soták má mimoriadne organizačné schopnosti. V období 2002 až 2019 vykonával funkciu riaditeľa Ústavu matematických vied PF UPJŠ. Od r. 2019 je dekanom PF UPJŠ. Dve funkčné obdobia bol predsedom Akademického senátu UPJŠ. Od r. 2007 doteraz zastupuje univerzitu v Rade vysokých škôl (RVŠ). Od r. 2008 doteraz zastupuje aj RVŠ v Rade pre rozvoj a financovanie VŠ.

**Doc. RNDr. Andrea Feňovčíková, PhD.** (rodená Semaničová) je absolventkou PF UPJŠ z r. 2002. Je žiačkou doc. RNDr. Jaroslava Ivanča, CSc. Doc. Feňovčíková obhájila PhD. prácu v roku 2006 a v roku 2013 sa na PF UPJŠ habilitovala za docentku. Po ukončení doktorandského štúdia na PF UPJŠ nastúpila do zamestnania na Strojnícku fakultu Technickej univerzity v Košiciach, kde pôsobí doteraz. Tam našla dobrého spolupracovníka v prof. Bačovi,



Doc. Andrea Feňovčíková.

s ktorým si našli spoločné témy výskumu. Podieľala sa na zavedení štúdia viacerých nových grafových invariantov, napr. modulárnych verzíí hranovej, vrcholovej a totálnej iregulárnej sily (spoluautori A. Ahmad, G. Ali, M. Bača, M. Imran, Z. Kimáková, A. N. A. Koam, A. Semaničová-Feňovčíková, K. A. Sugeng),  $H$ -iregulárnej sily a modifikácií vrcholových iregulárnych síl (spoluautori F. Ashraf, M. Bača, S. Cichacz, A. Görlich, M. Irfan, A. Ovais, J. Ryan, K. A. Sugeng, D. Tanna) a viacerých verzíí magických či antimagických ohodnotení a lokálneho antimagického chromatického čísla (spoluautori S. Arumugam, M. Bača, N. Bong, J. Ivančo, P. Kovář, R. T. Lai, M. Lascsáková, Y. Lin, M. Miller, F. A. Muntaner-Batle, K. Premalata, A. Semaničová-Feňovčíková, K. A. Sugeng, T. M. Wang). Je veľmi úspešnou matematickou, ktorá si svojimi výsledkami získala pozornosť na mnohých pracoviskách vo svete. Počas svojej vedeckovýskumnej práce sa zapojila do riešenia projektov na PF UPJŠ a tiež na rôznych zahraničných univerzitách, napr. Newcastle (Austrália), Bandung a Jakarta (Indonézia), Tamil Nadu a Chennai (India), Lahore (Pakistan), Taichung (Taiwan), Jazan (Saudská Arábia), Al Ain (Spojené Arabské Emiráty), Georgetown (USA), Castelldefels (Španielsko), Ostrava, a iné. Na viacerých z týchto pracovísk sa podieľala na výchove doktorandov, pričom u troch z nich bola aj školiteľkou (F. Ashraf, M. Irfan, A. Ovais) a u piatich spoluškoliteľkou. Je členkou redakčnej rady časopisu *Discrete Mathematics Letters* (Pakistan) a časopisu *Indonesian Journal of Combinatorics* (Indonézia). Je autorkou alebo spoluautorkou viac ako 120 prác uverejnených v medzinárodných časopisoch a zborníkoch z konferencií. Databáza Scopus eviduje na jej práce viac ako 450 citácií. Je často prizývaná k medzinárodnej spolupráci. Jej Hirschov  $h$ -index je 15. Jej Erdősovo číslo je 3.

**Doc. RNDr. Jaroslav Ivančo, CSc.** je žiakom prof. Jucoviča Podstatnú časť svojho akademického života, od r. 1983, prežil na PF UPJŠ. Od r. 2021 je dôchodcom. Bol tvorivým, či-

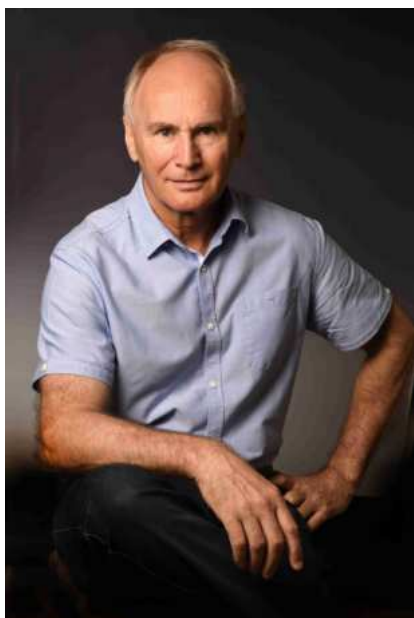
norodým a veľmi rešpektovaným členom Košickej diskrétne-matematickej školy kvôli jeho hlbokým matematickým vedomostiam. Objavil niekoľko zásadných matematických poznatkov. Jeho azda najznámejším matematickým výsledkom je analógia Kotzigovej vety o minimálnej váhe hrany konvexného mnohostena pre polyedrálne mapy na všetkých orientovateľných plochách. Najcitovanejšou (viac ako 50 citácií) jeho prácou je tá (s S. Jendroľom), ktorou určil presnú hodnotu totálnej



Doc. Jaroslav Ivančo.

hranovej iregulárnej sily stromov. Veľmi pekné, hlboké, výsledky dosiahol (niektoré spolu s L. Bezegovou a/alebo A. Semaničovou) aj pri štúdiu magických a super magických ohodnotení grafov. Bol vynikajúcim učiteľom. Ako školiteľ vychoval tri absolventky doktorandského štúdia (A. Semaničová, L. Bezegová, T. Polláková). Je autorom, resp. spoluautorom 44 vedeckých prác, ktoré väčšinou vyšli v špičkových svetových časopisoch. Databáza Scopus eviduje na jeho práce viac ako 180 citácií. Jeho Hirschov  $h$ -index je 8. Jeho Erdősovo číslo je 3.

**Doc. RNDr. Marián Klešč, PhD.** je žiakom prof. Jendroľa. Je absolventom Prírodovedeckej fakulty UPJŠ z roku 1978. Vyštudoval učiteľský odbor Matematika – fyzika. Od začiatku svojej academickej kariéry pôsobí na Fakulte elektrotechniky a informatiky Technickej univerzity v Košiciach. Je členom Košickej školy diskrétnej matematiky a zameril na výskum priesečníkových čísel grafov. Z tejto problematiky pod



Doc. Marián Klešč.

bo spoluautorom 26 pôvodných vedeckých prác uverejnených v špičkových svetových odborných časopisoch. Na tieto jeho práce databáza Scopus registruje viac ako 460 citácií. Jeho Hirschov  $h$ -index je 11 (podľa Scopus). Dve jeho práce boli citované viac ako 50-krát. Ako školiteľ priviedol k úspešnej obhajobe PhD. dve kolegyně (E. Draženskú a D. Kravcovú). Bol viackrát pozvaný prednášať ako jeden z hlavných rečníkov na významných medzinárodných konferenciách a workshopoch. Jeho Erdősove číslo je 3.

vedením prof. S. Jendroľa obhájil na PF UPJŠ v roku 1995 dizertačnú prácu. Následne v roku 2000 obhájil habilitačnú prácu a bol menovaný za docenta. Svojou trpezlivou a vytrvalou prácou na náročnej problematike priesečnikových čísel grafov sa vypracoval na úroveň svetovej špičky v danej oblasti. Najznámejšie sú jeho práce o priesečnikových číslach grafov získaných kar-teziánskym súčinom grafov na maximálne šiestich vrcho-loch s cestami, hviezdami či kružnicami. Je autorom ale-

**Doc. RNDr. Peter Mihók, CSc.** bol žiakom prof. Jucoviča. Absolvoval odbor Matematika na Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v roku 1972. Bol to veľmi talentovaný a medzinárodne dobre známy matematik. Dlhé roky pracoval na PF UPJŠ. V druhej polovici deväťdesiatych rokov prešiel pracovať na Matematický ústav Slovenskej akadémie vied, pracovisko Košice. Neskôr súbežne pracoval aj na Ekonomickej fakulte TU v Košiciach. Po dlhej a ťažkej chorobe zomrel v roku 2012.



Ako matematik pracoval na teórii zovšeobecnených zafarbení grafov a na štruktúrnych vlastnostiach grafov. Vo svete sú dobre známe výsledky o dedičných vlastnostiach grafov, ktoré postupne získaval v spolupráci s M. Borowieckim, I. Broerem, a svojimi žiakmi J. Buckom, R. Vaskym a najmä s G. Semanišinom. Jeho asi najkrajším matematickým výsledkom (získaným v spolupráci s G. Semanišinom a R. Vaským) je tvrdenie, že aditívne a dedičné vlastnosti grafov sú jednoznačne faktorizovateľné na ireducibilné faktory. Mal široko rozvinutú medzinárodnú spoluprácu, najmä s poľskými, maďarskými, a juhoafrickými matematikmi. V r. 1996 založil (spolu s M. Borowieckim a I. Broerem) medzinárodný vedecký klub „HEREDITARNIA, ktorý sa odvtedy schádza každoročne v rôznych krajinách. Databáza zbMATH eviduje 66 jeho prác, na ktoré má 168 citácií. V odbore Diskrétna matematika vychoval troch doktorandov (J. Bucko, R. Vasky, G. Semanišin). Niekoľko rokov bol členom organizačného výboru konferencie Cycles and Colourings. Jeho Erdősove číslo je 2.



Doc. Peter Mihók.

**Doc. RNDr. Marián Trenkler, CSc.** je žiakom prof. Jucoviča. Je absolventom PF UPJŠ z r. 1971 v odbore Matematika. Vedeckú hodnosť CSc. získal v odbore Geometria a topológia na Prírodovedeckej fakulte UK v Bratislave v r. 1979. Docentom sa stal v r. 1982. Dlhé roky pôsobil na PF UPJŠ. V roku 2002 odišiel pracovať na Pedagogickú fakultu Katolíckej univerzity v Ružomberku, kde pôsobil až do roku 2020, kedy odišiel do dôchodku. Na počiatku svojej vedeckej dráhy študo-



Doc. Marián Trenkler.

val štrukturálne vlastnosti konvexných mnohostenov (stenové vektory 4-pravidelných a 5-pravidelných konvexných mnohostenov). Neskôr sa venoval magickým ohodnoteniam grafov. V tejto oblasti sa mu podarilo (spolu s o svojim diplomantom S. Jezným) pekný výsledok: charakterizácia magických grafov. Tejto téme ostal verný až do konca svojej kariéry. Ku konvexným mnohostenom sa ešte vrátil koncom deväťdesiatych ro-

kov, keď sa mu podarilo (spolu s prof. Jendroľom) vyriešiť problém z teoretickej chémie o existencii fulleroidov s predpísanou geometrickou štruktúrou. Podľa databázy zbMATH je autorom, resp. spoluautorom 24 pôvodných vedeckých prác, ktoré vyšli v medzinárodných časopisoch. Databáza zbMATH eviduje na jeho práce 43 citácií. Jeho Erdősove číslo je 3.

**RNDr. Július Czap, PhD.** je žiakom prof. Jendroľa. Je absolventom PF UPJŠ z r. 2006. Patrí k strednej generácii členov Košickej školy diskkrétnej matematiky. Po skončení doktorandského štúdia na PF UPJŠ v r. 2010 sa zamestnal na Ekonomickej fakulte Technickej univerzity v Košiciach, kde pôsobí doteraz. Je tvorivým a činorodým členom tímu so širokým vedeckým záberom. Skúmal niekoľko typov hranových, resp. vrcholových (faciálnych) zafarbení rovinných grafov, pričom typy zafarbení sú určené farebnými vlastnosťami stenových ciest vzhľadom na zafarbenie ich hrán, resp. vrcholov. V spolupráci so spoluautormi (J. Barát, I. Fabrici, J. Harant, S. Jendroľ, F. Kardoš, R. Soták, P. Šugerek, J. Valiska, M. Voigt)

položil základy životaschopnej problematiky – teórie faciálnych zafarbení rovinných grafov, pri ktorých obmedzenia na zafarbenie sú na stenách týchto grafov (cyklické, nepárne, nerepetitívne, totálne, nekonfliktné, bez anagramov, pakovacie, rankingové, WORM, totálne zig-zag, a pod.). Je autorom jednej a spoluautorom ďalších štyroch prác venovaných 1-planárnym grafom. Je autorom, resp. spoluautorom 52 vedeckých prác, ktoré vyšli v špičkových svetových časopisoch. Databáza Scopus eviduje na jeho práce viac ako 170 citácií. Je často prizývaný k medzinárodnej spolupráci najmä kolegami z Nemecka a Maďarska. Jeho Hirschov  $h$ -index je 10. Jeho Erdősovo číslo je 2. Ako spoluriešiteľ sa podieľal na úspešnom riešení niekoľkých projektov APVV a VEGA.



RNDr. Július Czap.

**RNDr. Igor Fabrici, Dr. rer. nat.** je absolventom PF UPJŠ z r. 1994. Po ukončení PF ostal na nej študovať na doktorandskom štúdiu pod vedením prof. Jendroľa, ktoré neskôr, na dlhodobom pracovnom pobyte na TU Ilmenau v Nemecku, pod vedením prof. H. Walthera, dokončil. Témami jeho výskumu sú najmä lokálne štrukturálne vlastnosti (existencia ľahkých podgrafov) planárnych a  $k$ -planárnych grafov, zafarbenia rovinných grafov a dlhé kružnice v grafoch. Dokázal hodnotné výsledky o stenovo ohraničených zafarbeniach rovinných grafov (spoluautori F. Göring, M. Horňák, S. Jendroľ, T. Madaras, M. Voigt, M. Vrbjarová). Cenné sú tiež jeho nedávne poznatky o najdlhších kružniciach v esenciálne 4-súvislých rovinných grafoch (spoluautor J. Harant, S. Mohr). Za jeho top



RNDr. Igor Fabrici.

výsledok je možné považovať tvrdenie (dokázané spolu s S. Jendroľom), že každý polyedrálly graf obsahujúci cestu na  $k$  vrcholoch, obsahuje aj cestu na  $k$  vrcholoch, z ktorých každý má stupeň najviac ak  $5k$ ; pričom hranicu  $5k$  nie je možné vo všeobecnosti znížiť. Ako pomocný školiteľ sa podieľal na vedeckej výchove dvoch doktorandiek (M. Timková a S. Rindošová). Je často prizývaný k medzinárodnej spolupráci najmä kolegami z Nemecka a Česka. Je autorom resp. spoluautorom 27 vedeckých prác, ktoré vyšli v špičkových svetových časopisoch, a na ktoré databáza zbMATH eviduje 197 citácií. Jeho Hirschov  $h$ -index je 7. Jeho Erdősovo číslo je 3. Je dlhoročným spoluorganizátorom medzinárodnej konferencie Cycles and Colourings. Bol tiež členom špičkového tímu KOSDIM pod vedením prof. S. Jendroľa.

**RNDr. Ing. František Kardoš, PhD.** je absolvent magisterského štúdia matematiky na FMFI UK v Bratislave z roku 2003. Doktorandské štúdium absolvoval na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach pod vedením prof. S. Jendroľa. Na PF UPJŠ obhájil PhD prácu v roku 2007. Následne pôsobil ako odborný asistent na Ústave matematických vied PF UPJŠ do roku 2011. Od roku 2012 je asistentom na Université de Bordeaux vo Francúzsku. Počas doktorandského štúdia pracoval na otázkach týkajúcich sa chemickej teórie grafov (štúdium kombinatorických vlastností grafov použiteľných na modelovanie molekulárnej štruktúry). V svojej dizertačnej práci sa venoval nutným a postačujúcim podmienkam existencie tzv.

grafov fulleroidov – kubických 3-súvislých planárnych grafov s obmedzeniami na veľkosti stien, v závislosti od grupy symetrie. Získané výsledky tvoria podstatnú časť kapitoly [S. Jendroľ and F. Kardoš, *Symmetry of fullerenes*, in: **Handbook of Nanophysics**, ed. K. D. Sattler, Taylor & Francis 2010, 28.1. – 28.13.]

Na poli chemickej teórie grafov sa F. Kardoš ďalej venoval predovšetkým vlastnostiam grafov fullerénov – kubických 3-súvislých planárnych grafov so stenami veľkosti 5

a 6, pričom na tejto triede grafov skúmal rozličné kombinatorické vlastnosti a invarianty, ako napríklad cyklické hranové rezy, diameter, počet perfektných párování, číslo nasýtenosti (minimálne veľkosti maximálneho párovania) a iné. Získané výsledky sú zahrnuté do prehľadového článku [V. Andova, F. Kardoš, and R. Škrekovski, *Fullerene Graphs and Some Relevant Graph Invariants*, in: **Topics in Chemical Graph Theory**, ed. I. Gutman, Univ. Kragujevac 2014, 39 – 54].

Jeden z najatraktívnejších problémov týkajúcich sa grafov fullerénov, v tom čase otvorený, bola otázka existencie Hamiltonovského cyklu, pričom táto otázka bola špeciálnym prípadom domnienky autorov Goodey a Barnette, vyslovenej ešte v 70tych rokoch, hovoríacej, že všetky kubické 3-súvislé planárne grafy so stenami veľkosti najviac 6 sú Hamiltonovské. F. Kardošovi sa podarilo túto domnienku dokázať, pričom dôkaz spočíva v postupnej transformácii a redukcii do stavu, kde bolo postačujúce použiť počítačové prehľadávanie možností vzájomného usporiadania stien veľkosti ostro menšej ako 6 na lokálne overenie požadovaných globálnych vlastností príslušných grafov [F. Kardoš, *A computer-assisted proof*



RNDr. Ing. František Kardoš.

of Barnette-Goodey conjecture: Not only fullerene graphs are Hamiltonian, **SIAM J. Discrete Math.** **34** (1) (2020), 62 – 100]. O význame dosiahnutého výsledku svedčí fakt, že bol vybratý do prestížneho výberu SIGEST [F. Kardoš. *Hamiltonicity of Cubic Planar Graphs with Bounded Face Sizes*, **SIAM Review**, **2022**, **64** (2), 425 – 465].

Ďalším významným výsledkom, ktorý F. Kardoš dosiahol v spoluautorstve, bolo dokázanie hypotézy Lovásza a Plummera, takisto zo 70tych rokov, ktorá tvrdí, že kubické bezmostové grafy majú exponenciálne veľa perfektných párování. [L. Esperet, F. Kardoš, A. King, D. Král, and S. Norine, *Exponentially many perfect matchings in cubic graphs*, **Adv. Math.** **227** (2011) 1646 – 1664].

Neskôr svoj okruh vedeckých záujmov rozšíril na ďalšie aspekty teórie grafov, vrátane rozličných verzií farbení grafov, štruktúry a vlastností kubických grafov a perfektných párování v nich. F. Kardoš je autorom alebo spoluautorom 39 pôvodných vedeckých prác (podľa Scopus), ktoré vyšli v popredných svetových vedeckých časopisoch. Zaznamenal na nich viac ako 390 citácií podľa databáz Scopus a WoS. Jeho Hirschov index je 12 (podľa Scopusu), jeho Edósove číslo je 3. V ostatných rokoch sa podieľa na organizovaní úspešnej konferencie Cycles and Colourings.

**RNDr. Erika Fecková-Škrabuľáková, PhD.** patrí do generácie mladších úspešných žiakov Košickej školy diskkrétnej matematiky. Je žiačkou prof. Jendroľa. Je absolventkou magisterského štúdia učiteľstva matematiky a fyziky na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach z roku 2005 a absolventkou doktorandského štúdia v odbore Diskrétna matematika na tej istej fakulte. Svoju dizertačnú prácu obhájila v roku 2009. Po absolvovaní doktorandského štúdia pôsobí ako odborná asistentka na Fakulte baníctva, ekológie, riadenia a geotechnológií Technickej univerzity v Košiciach (FBERG TUKE). Počas doktorandského štúdia pracovala najmä na otázkach týkajúcich sa faciálnych hranových zafarbení grafov. Neskôr už

ako zamestnankyňa Technickej univerzity v Košiciach okruh svojich vedeckých záujmov rozšírila na aplikačné aspekty teórie grafov a ďalších kombinatorických štruktúr.

Vo svojej dizertačnej práci sa najprv venovala štúdiu minimálneho počtu farieb nutných k vynúteniu dúhovej steny pri hranovom zafarbení súvislých rovinných grafov. Získala pritom (v spolupráci so S. Jendroľom, J. Miškufom a R. Sotákom) výsledky, ktoré boli v roku 2009 uve-



Dr. Erika Fecková-Škrabuľáková.

rejené v špičkovom odbornom časopise *Journal of Graph Theory*. V tom istom časopise jej vyšla v roku 2011 (v spoluautorstve s F. Havetom, S. Jendroľom a R. Sotákom) práca, ktorá sa následne stala motiváciou pre štúdium faciálnych Thueovských (nerepetitívnych) zafarbení na viacerých pracoviskách v Európe. Zaznamenala 14 citácií. Neskôr v spolupráci s kolegami z Nemecka, Poľska, a Slovinska úspešne pokračovala v intenzívnom štúdiu tohto typu zafarbení. Výsledkom boli viaceré publikácie, ktoré vyšli v renomovaných vedeckých časopisoch vydavateľstiev Springer Nature a Elsevier. Tieto sú citované najmä v zahraničí. Jej práca (v spoluautorstve s J. Przybyľom a J. Schreyerom) využívajúca pokrokovú entropiu compression method zaznamenala 17 citácií.

Databázy Web of Science a Scopus evidujú celkovo 23 pôvodných vedeckých prác, ktorých autorkou alebo spoluautorkou je RNDr. E. Fecková Škrabuľáková, PhD. 13 z nich sa týka teórie grafov. Tie isté databázy evidujú na jej práce 113 citácií. V databáze zbMATH je evidovaných 12 jej prác. Na 7 z nich má, podľa zbMATH, spolu 46 citácií. Jej Erdősovo číslo je 3.

O svojich výsledkoch v oblasti teórie grafov referovala na viacerých konferenčných i nekonferenčných fórach. Za zmienku stojí najmä pozvaná prednáška minisympózia v rámci SIAM Conference on Discrete Mathematics v roku 2014 v USA a pozvaná prednáška na International Conference on Emerging Trends in Graph Theory v roku 2019 v Indii. Nekonferenčné prednášky z oblasti teórie grafov predniesla v Dortmunde, v Ilmenau, v Maribore, v Krakove a v Bratislave.

RNDr. E. Fecková Škrabuľáková, PhD. sa v ostatných rokoch veľmi aktívne zapojila do práce košickej pobočky Jednoty slovenských matematikov a fyzikov ako členka jej výboru (od októbra 2023 vo funkcii predsedníčky). Taktiež sa už niekoľko rokov veľmi aktívne podieľa na organizácii Konferencie košických matematikov v Herľanoch.



RNDr. Mária Maceková.

**RNDr. Mária Maceková, PhD.** reprezentuje najmladšiu generáciu žiakov Košickej školy diskkrétnej matematiky. Je absolventkou PF UPJŠ z r. 2012 v odbore Manažérska matematika. Na tej istej fakulte úspešne ukončila doktorandské štúdium v odbore Diskrétna matematika v 2016. Svoju vedeckú prácu úspešne rozbehla pod vedením svojho školiťeľa prof. Jendroľa. Je spoluautorkou 12 publikovaných vedeckých prác. Získala poznatky o štruktúre krátkych ciest v riedkych rovinných grafoch (spoluautori S. Jendroľ,

M. Montassier, R. Soták) ako aj ľahkých podgrafov vnorených grafov na iných plochách, ktoré boli takmer okamžite citované. Na svoje práce doteraz zaregistrovala 64 citácií (bez auto-



citácií) podľa databázy Scopus. Jej Erdősovo číslo je 3. V ostatných rokoch sa podieľa na organizovaní úspešnej konferencie Cycles and Colourings. Bola tiež členkou špičkového tímu KOSDIM pod vedením prof. S. Jendroľa.

Neoddeliteľnou súčasťou úspešného príbehu Košickej školy diskkrétne matematiky je **RNDr. Štefan Schrötter, CSc.** Svoju vedeckú hodnosť CSc. získal v odbore Približné a numerické metódy. Celý svoj akademický život prežil na Technickej univerzite v Košiciach. Momentálne je už na dôchodku. Napriek tomu rád chodieval počúvať prednášky na KOKOSE, ktorý sa pravidelne schádzal na PF UPJŠ. Je spoluautorom štyroch vedeckých článkov z diskkrétnej matematiky, ktoré vznikli vďaka debatám na seminári. Na tieto práce databáza Scopus eviduje 96 citácií. Jeho pracovné povinnosti mu nedovoľovali sa intenzívnejšie a plnohodnotne zapojiť do vedeckého výskumu, ktorý sa konal okolo KOKOSu. Na druhej strane ako člen organizačných výborov mnohých konferencií, ktorým predsedal prof. Stanislav Jendroľ, vykonal veľké množstvo drobnej organizačnej práce. Ako člen výborov, zodpovedný za finančné náležitosti a iné záležitosti (ako napr. stravovanie, kvalita ubytovania, vzťahy s personálom hotelov a pod.), spojené s konferenciami, bol absolútne spoľahlivý a precízny.



---

SPOMIENKY NIEKTORÝCH ČLENOV KŠDM  
AKO AJ NIEKTORÝCH ÚČASTNÍKOV  
KOKOSU A WORKSHOPOV C&C

---

Skupina košických diskretných matematikov je v pravidelnom kontakte s českou, slovenskou i medzinárodnou komunitou vďaka košickému pracovisku, ktoré každoročne (od roku 1992) organizuje workshopy Cycles and Colourings ako aj konferenciu CSGT (Czech-Slovak Conference on Graph Theory) organizovanú pravidelne každoročne od r. 1969 českými a slovenskými matematickými pracoviskami. Prof. Stanislav Jendroľ, ako predseda košickej pobočky JSME, sa snažil pomôcť skvalitniť výskum v matematických odboroch nielen na lokálnej úrovni a práve vďaka tomu mohlo dôjsť aj prostredníctvom týchto podujatí k výraznému rozvoju Košickej školy diskretnéj matematiky. Nesmieme zabudnúť aj na KOšický KOmbinatorický Seminár (KOKOS), ktorý založil prof. Ernest Jucovič v roku 1966. Po ňom skoro 40 rokov ho viedol prof. Stanislav Jendroľ a v súčasnosti pokračuje jeho žiak prof. Tomáš Madaras. V tejto časti prinášame príspevky medzinárodných spolupracovníkov KŠDM, účastníkov týchto podujatí, ale aj ich spoluorganizátorov.

Bližšie informácie o jednotlivých konferenciách môžete nájsť na stránkach

- C&C – <https://candc.upjs.sk/>,
- CSGT – <https://conf.ccvapp.upjs.sk/csgt/>,
- KOKOS – <https://www.upjs.sk/prirodovedecka-fakulta/pracoviska/ustavy-pf/umat/vv/sem/kokos/>.

### 3.1 On collaboration between Košice and Zielona Góra groups in Graph Theory.

*Mieczysław Borowiecki*

**Beginnings.** In 1976, Zdzisław Skupień (Kraków), Lucjan Szamkołowicz (Wrocław) and Mieczysław Borowiecki (Zielona Góra) organized a Symposium on Combinatorial Analysis in Zielona Góra. The following mathematicians from Košice participated in the symposium: V. Jacoš, P. Mihók, J. Ninčák and M. Trenkler, see [8]. It was my first contact with mathematicians from Košice. Mihok's topic was very close to my interests. In 1983, I was extended an invitation by Professor Jucovic to Košice, specifically to the Czechoslovak conference on Graph Theory in Zemplinská Širava. Subsequently, I established a closer collaboration with Peter Mihók. During this conference, we presented papers related to hereditary properties of graphs. A year later, Peter came to our Regional Scientific Session of Mathematicians in Žagaň. Our first joint work was "On  $(n, P)$ -partitionable graphs", which I presented at a conference in Eyba, Germany, see [4]. After several years of cooperation, we developed a joint project on hereditary properties of graphs during the conference in Prachatice, which was published in a book edited by Kulli. This research became the basis for further research for our PhD students.

**Cycles and Colourings Workshop.** In 1993, I participated in the second Workshop Cycles and Colourings in Starý Smokovec, where I was given the opportunity to listen to many lectures given by great mathematicians, including those from Košice. This was the beginning of a broader cooperation with Košice, which brought many new ideas to

### 3.1 O spolupráci medzi skupinami teórie grafov v Košiciach a Zielonej Góre

*Mieczysław Borowiecki*

**Začiatky.** V roku 1976 zorganizovali Zdzisław Skupień (Kra-kov), Lucjan Szamkołowicz (Wroclav) a Mieczysław Boro-wiecki (Zielona Góra) sympóziu o kombinatorickej analýze v Zielonej Góre. Na sympóziu sa zúčastnili títo košickí ma-tematici: V. Jacoš, P. Mihók, J. Ninčak a M. Trenkler, pozri [8]. Bol to môj prvý kontakt s košickými matematikmi. Mi-hókova téma bola veľmi blízka mojim záujmom. V roku 1983 som dostal od profesora Jucoviča pozvanie do Košíc, konkrétne na československú konferenciu o teórii grafov na Zemplín-skej šírave. Následne som s Petrom Mihókom nadviazal už-šiu spoluprácu. Na tejto konferencii sme predniesli príspevky týkajúce sa dedičných vlastností grafov. O rok neskôr prišiel Peter na našu Regionálnu vedeckú matematickú konferenciu v Žagani. Našou prvou spoločnou prácou bola práca „On  $(n, P)$ -partitionable graphs“, ktorú som prezentoval na kon-ferencii v nemeckom meste Eyba, pozri [4]. Po niekoľkých rokoch spolupráce sme na konferencii v Prachaticiach vypra-covali spoločný projekt o dedičných vlastnostiach grafov, kto-rý bol publikovaný v knihe vydanej Kullim. Tento výskum sa stal základom pre ďalší výskum našich doktorandov.

**Workshop Cycles and Colourings.** V roku 1993 som sa zúčastnil na druhom workshope Cycles and Colourings v Starom Smokovci, kde som mal možnosť vypočúť si množ-stvo prednášok významných matematikov, vrátane tých ko-šických. Bol to začiatok širšej spolupráce s Košicami, kto-rá priniesla do práce oboch vedeckých komunít mnoho no-vých myšlienok. Spomeniem tu krásnu prácu „Sequences Re-alizable by Maximal  $k$ -Degenerate Graphs“, ktorej autorom je M. Borowiecki (Zielona Góra), a ktorá pochádza z Košíc:

the work of both scientific communities. I will mention here the beautiful work "Sequences Realizable by Maximal  $k$ -Degenerate Graphs", authored by M. Borowiecki (Zielona Góra) and from Košice: J. Ivančo, P. Mihók, G. Semanišin, see [2]. I would like to add, that the  $k$ -trees, a subclass of these graphs, do not yet have such a characterization for  $k \geq 3$ .

Another interesting collaborative work is [3], the main result of which was included along with the proofs in the book [7].

Workshop C&C was, for me, one of the most important scientific events in which I participated. I have participated in ten C&C workshops and have had the privilege of giving a lecture as an invited speaker.



Workshop C&C, Tatranská Štrba, 2005. (From the left: Mieczysław Borowiecki and Stanislav Jendroľ.) (Foto: Stanislav Jendroľ.)

**Hereditary properties and Hereditarnia.** Our joint research was focused on the hereditary properties of graphs, the main topic of our joint research. In 1995, Izak Broere (Johannesburg) joined our research groups with a highly promising collaboration. A year later, following my and Peter's visit to Johannesburg, a joint project was initiated to develop a paper summarizing the results to date and formulating research questions for the upcoming years.

J. Ivančo, P. Mihók, G. Semanišin, pozri [2]. Chcel by som dodať, že  $k$ -stromy, podtrieda týchto grafov, zatiaľ takúto charakteristiku pre  $k \geq 3$  nemajú.

Ďalšou zaujímavou spoločnou prácou je [3], ktorej hlavný výsledok bol spolu s dôkazmi zaradený do knihy [7].

Workshop C&C bol pre mňa jednou z najvýznamnejších vedeckých udalostí, na ktorých som sa zúčastnil. Zúčastnil som sa desiatich workshopov C&C a mal som tú česť prednášať ako pozvaný prednášajúci.



11th workshop CID (Colourings, Independence, Domination), Karpacz (Poľsko), 2005. (Zdroj: Mieczysław Borowiecki.)

**Dedičné vlastnosti a Hereditarnia.** Náš spoločný výskum bol zameraný na dedičné vlastnosti grafov, ktoré sú hlavnou témou nášho spoločného výskumu. V roku 1995 sa k našim výskumným skupinám pripojil Izak Broere (Johannesburg), s ktorým bola spolupráca veľmi sľubná. O rok neskôr, po mojej a Petrovej návšteve v Johannesburgu, sa začal spoločný projekt, ktorého cieľom bolo vytvoriť prácu, ktorá by zhrnula doterajšie výsledky a formulovala výskumné otázky na najbližšie roky.

Study of hereditary properties of graphs was greatly influenced by the paper [5] of Borowiecki and Mihók and its progress was seriously underlined and further stimulated by the directional survey paper [1] that was written a few years later. It should be emphasized here that the entire issue 1 of volume 17 was devoted to the hereditary properties of graphs, and the works were authored by our PhD students or colleagues cooperating with us. Several PhD Theses on this topic were written in three research centers (Johannesburg, Košice and Zielona Góra) as a result of this work.

Below are a few remarks regarding Hereditarnia based on the text written by Izak Broere and Peter Mihók, entitled Hereditarnia, DMGT 33(1) 7 (2013). Peter passed away in March of 2012, while Izak passed away in August of 2020.

Workers in this area, lead by Mietek Borowiecki, Izak Broere and Peter Mihók, founded the Hereditarnia Club in March 1996. The many activities of the growing group of members of this club are described in its web page and include more than 20 workshops since December 1998. These productive meetings have all been characterized by the friendly collaborative style of Club members. The word Hereditarnia cannot be found in any dictionary. It is a combination of the English word "*Heredity*" and the Polish suffix "*arnia*" which is used in Polish in the description of many pleasant places (e.g. Palmiarnia, Kawiarnia); hence the word *Hereditarnia* is meant to describe the pleasant world of hereditary properties of graphs!

**Discussiones Mathematicae Graph Theory.** The DMGT journal, which was founded by myself, was established in 1995 as a publishing house of the University of Zielona Góra.

I am delighted to acknowledge the consent of my colleagues from Košice, namely M. Horňák, S. Jendrol', and P. Mihók, to be included in the Editorial Board of DMGT. In 2017, G. Semanišin joined the editorial team.

The work of high-level scientists has greatly contributed to the development of DMGT.



Štúdium dedičných vlastností grafov bolo veľmi ovplyvnené prácou [5] od Borowieckeho a Mihóka a jej prínos bol zásadne zdôraznený a ďalej stimulovaný vplyvným prehľadovým článkom [1], ktorý bol napísaný o niekoľko rokov neskôr. Tu treba zdôrazniť, že celé číslo 1 zväzku 17 bolo venované dedičným vlastnostiam grafov a autormi prác boli naši doktorandi alebo s nami spolupracujúci kolegovia. Výsledkom tejto práce bolo niekoľko doktorandských prác na túto tému, ktoré vznikli v troch výskumných centrách (Johannesburg, Košice a Zielona Góra).

Nižšie uvádzam niekoľko poznámok týkajúcich sa Hereditarnia na základe textu Izaka Broera a Petra Mihóka s názvom Hereditarnia, DMGT 33(1) 7 (2013) aj ako pozvaný prednášajúci. Peter zomrel v marci 2012, zatiaľ čo Izak zomrel v auguste 2020. Pracovníci v tejto oblasti na čele s Mietkom Borowieckim, Izakom Broereom a Petrom Mihókom založili v marci 1996 klub Hereditarnia. Mnohé aktivity rozrastajúcej sa skupiny členov tohto klubu sú opísané na jeho webovej stránke a zahŕňajú viac ako 20 seminárov od decembra 1998. Všetky tieto produktívne stretnutia sa vyznačovali priateľským štýlom spolupráce členov klubu. Slovo Hereditarnia nemožno nájsť v žiadnom slovníku. Je to spojenie anglického slova „Hereditary“ a poľskej prípony „arnia“, ktorá sa v poľštine používa pri opise mnohých príjemných miest (napr. Palmiarnia, Kawiarnia); preto slovo *Hereditarnia* má opisovať príjemný svet dedičných vlastností grafov!

**Discussiones Mathematicae Graph Theory.** Časopis DMGT, ktorý som založil, vznikol v roku 1995 ako úspešný produkt vydavateľstva Univerzity v Zielonej Góre.

S potešením kvitujem súhlas mojich košických kolegov, menovite M. Horňáka, S. Jendroľa a P. Mihóka, so zaradením do redakčnej rady časopisu DMGT. V roku 2017 sa do redakčného tímu pridal G. Semanišin.

Práca významných vedcov výrazne prispela k rozvoju časopisu DMGT. Rád by som spomenul jednu z posledných významných prác [6] košických autorov, v ktorej nájdete nád-

I would like to mention one of the last major works [6] of the Košice authors, in which you will find a wonderful presentation of the results obtained in Košice and the results of world science.

**Few words about me.** As I was born a significant amount of time ago, my recollection began in 1976, shortly after I had completed my PhD Theses a few years prior.

I am a retired professor of mathematical sciences and supervised ten PhD students. For several years, I have held the position of Director of Mathematics Institute and Dean of the Faculty at the University. I have organized or co-organized several dozen international conferences. I am the former editor-in-chief and now honorary editor of DMGT.

In 2013, I was awarded the gold medal of the Faculty of Science P. J. Šafárik University in Košice on the occasion of the 50<sup>th</sup> anniversary of its foundation for a long-term cooperation and a contribution to the development of discrete mathematics of the Faculty of Science P. J. Šafárik University in Košice. I am extremely pleased with the award that I have received.



12th Workshop CID (Colouring, Independence, and Domination), Karpacz (Polsko), 2007. (Third from the left: D. B. West (USA), S. Jendroľ (Slovensko), Z. Lonc, M. Kubale, K. Balinska (all three Poland), N. . Narayanan (India), E. Sopena (France).) (Foto: Mieczysław Borowiecki.)

hernú prezentáciu výsledkov získaných v Košiciach a výsledkov svetovej vedy.

**Niekoľko slov o mne.** Keďže som sa narodil pred mnohými rokmi, moje spomienky začnem v roku 1976, krátko po tom, čo som niekoľko rokov predtým dokončil doktorandskú prácu. Som emeritným profesor matematických vied a viedol som desiatich doktorandov. Niekoľko rokov som zastával funkciu riaditeľa Matematického ústavu a dekana fakulty na univerzite. Organizoval alebo spoluorganizoval som niekoľko desiatok medzinárodných konferencií. Som bývalý šéfredaktor a teraz čestný redaktor časopisu DMGT. V roku 2013 mi bola udelená Zlatá medaila Prírodovedeckej fakulty Univerzity P. J. Šafárika v Košiciach pri príležitosti 50-tého výročia jej založenia za dlhoročnú spoluprácu a prínos k rozvoju diskretnej matematiky Prírodovedeckej fakulty Univerzity P. J. Šafárika v Košiciach. Ocenenie, ktoré som získal, ma nesmierne teší.



Spoločenský večer, Gronów (Poľsko), 1999. (Zľava: E. Drgas-Burchardt, S. Jendroľ, J. Bucko, E. Sidorowicz, M. Borowiecki.) (Zdroj: Stanislav Jendroľ.)



Zakladatelia klubu Hereditarnia, Northern Cape (Južná Afrika), 1996.  
(Zľava: M. Borowiecki, I. Broere, P. Mihók.) (Foto: Mieczysław Borowiecki)

Niečo o autorovi:

Prof. Dr.hab. Mieczysław Borowiecki je popredný svetový odborník vo viacerých oblastiach teórie grafov. Je jedným zo zakladateľov poľskej teórie grafov a úspešným organizátorom desiatok poľských konferencií. Založil a dlhé roky viedol ako hlavný editor karentovaný časopis *Discussiones Mathematicae Graph Theory*. Je autorom, resp. spoluautorom viac ako 100 pôvodných vedeckých prác, na ktoré databáza zbMath registruje viac ako 300 citácií. Je dlhoročným spolupracovníkom a fanúšikom Košickej školy diskkrétnej matematiky.

Adresa autora:

Institute of Mathematics, University of Zielona Góra, Poland

e-mail: [M.Borowiecki@wmie.uz.zgora.pl](mailto:M.Borowiecki@wmie.uz.zgora.pl)

---

## LITERATÚRA

---

- [1] M. Borowiecki, I. Broere, M. Frick, P. Mihók and G. Semanišin, A survey of hereditary properties of graphs, *Discuss. Math. Graph Theory* 17 (1997) 5–50.
- [2] M. Borowiecki, J. Ivančo, P. Mihók, G. Semanišin, Sequences Realizable by Maximal  $k$ -Degenerate Graphs, *J. Graph Theory*, 19(1) 117–124 (1995).
- [3] M. Borowiecki, S. Jendroľ, D. Kraál and J. Miškuf, List coloring of Cartesian products of graphs, *Discrete Math.* 306 (2006) 1955–1958.
- [4] M. Borowiecki and P. Mihók, On  $(n, P)$ -partitionable graphs, in H. Sachs, ed., *Graphs, Hypergraphs and Applications*, Proc. Conference on Graph Theory, Eyba 1984, 15–18.
- [5] M. Borowiecki and P. Mihók, Hereditary properties of graphs, in V. R. Kulli, ed., *Advances in Graph Theory* (Vishwa International Publication, Gulbarga, 1991) 41–68.
- [6] J. Czap, M. Horňák and S. Jendroľ, A survey on the cyclic coloring and its relaxations, *Discuss. Math. Graph Theory* 41(1) (2021) 5–38.
- [7] W. Imrich, S. Klavžar and D. F. Rall, *Topics in Graph Theory* (A. K. Peters, Ltd. Wellesley, Massachusetts, 2008).
- [8] *Graphs, Hypergraphs and Block Systems*, Proc. Symposium Combinatorial Analysis, eds., M. Borowiecki, Z. Skupień and L. Szamkołowicz, Zielona Góra, 1976.

## 3.2 Memories on a mutual cooperation between Discrete Mathematics Schools in Ilmenau and Košice

*Jochen Harant*

I spent my academic life at Technical University of Ilmenau (formerly Technische Hochschule Ilmenau), Germany until my retirement in 2022. During this time, I have mainly devoted myself to the mathematical discipline of "*Graph Theory*".

This rapidly developing theory about special discrete structures is still very young compared to other areas of mathematics. The beginning of graph theory goes back to 1736. At that time the famous Swiss mathematician and physicist Leonhard Euler published a solution for the "*Königsberg bridge problem*". The question is whether there is a walk through the city of Königsberg which uses each of the seven bridges over the river Pregel exactly once. Euler specified a general necessary condition which is not satisfied for this problem. Thus, he could deny the existence of such a walk through Königsberg. In 1878 the concept "*Graph*" was used in support of graphic notations of chemical structures for the first time by the British mathematician James Joseph Sylvester. The first textbook for graph theory by the Hungarian mathematician Dénes Kőönig appeared in 1936. One of the most famous and stimulating problems with a decisive influence on the development of graph theory is the *Four Colour Problem* posed by the South African mathematician and botanist Francis Guthrie already in 1852. The question is how many colours are needed to colour the countries of any map in the Euclidian plane such that no two neighbouring countries get the same colour assigned. After lengthy investigations, even with help of computers, now we know that four colours are sufficient.

## 3.2 Spomienky na vzájomnú spoluprácu medzi školami diskkrétnej matematiky v Ilmenau a Košiciach

*Jochen Harant*

Svoj akademický život som strávil na Technickej univerzite v Ilmenau (predtým Technische Hochschule Ilmenau) v Nemecku až do odchodu do dôchodku v roku 2022. Počas tohto obdobia som sa venoval najmä matematickej disciplíne „*Teória grafov*“.

Táto rýchlo sa rozvíjajúca teória špeciálnych diskrétnych štruktúr je v porovnaní s inými oblasťami matematiky stále veľmi mladá. Začiatky teórie grafov siahajú do roku 1736. Vtedy slávny švajčiarsky matematik a fyzik Leonhard Euler uverejnil riešenie „*problému Königsbergských mostov*“. Otázka znie, či existuje prechádzka mestom Königsberg, ktorá využíva každý zo siedmich mostov cez rieku Pregel presne raz. Euler určil všeobecnú nutnú podmienku, ktorá pre tento problém nie je splnená. Mohol teda poprieť existenciu takejto prechádzky cez Königsberg. V roku 1878 pojem „*Graf*“ prvýkrát použil na podporu grafických zápisov chemických štruktúr britský matematik James Joseph Sylvester. Prvá učebnica teórie grafov od maďarského matematika Dénesa Kőniga vyšla v roku 1936. Jedným z najznámejších a najpodnetnejších problémov s rozhodujúcim vplyvom na rozvoj teórie grafov je *problém štyroch farieb*, ktorý položil juhoafrický matematik a botanik Francis Guthrie už v roku 1852. Otázka znie, koľko farieb je potrebných na vyfarbenie krajín na ľubovoľnej mape v euklidovskej rovine tak, aby žiadne dve susedné krajiny neboli zafarbené rovnakou farbou. Po dlhom skúmaní, dokonca aj s pomocou počítačov, dnes vieme, že postačujú štyri farby.

Nowadays one finds plenty of applications of graph theory in many areas of our life, as for example in computer science, chemistry, physics, and biology. In the sixties of the last century, graph theory began to develop rapidly, however, at this time it was still possible that all renowned experts of this discipline could come together on a single scientific congress.

Professor E. Jucovič was one of these pioneers of combinatorics and graph theory. From 1966 until his retirement he was a lecturer and later a professor at the Faculty of Natural Science in Košice. His main scientific interest was in combinatorial geometry and related mathematical areas as graph theory. Under his management the "School of Combinatorics in Košice" developed into an important and notable center for research in the field of combinatorial geometry.

In 1963 shortly after his habilitation Professor H. Sachs came from the Martin-Luther-University Halle-Wittenberg in Germany to the Technische Hochschule Ilmenau. He was asked to dedicate his strength to the creation and the development of a mathematical institute in Ilmenau. At this time he started to found a graph theory group in Ilmenau. He established relationships with excellent colleagues of discrete mathematics worldwide and was often called a "*bridge-builder*" between mathematicians in East and West.

At that time both Professor Jucovič and Professor Sachs came into scientific contact and first research relations between graph theorists of Košice and Ilmenau developed. There were attempts to extend these relations by mutual research visits of colleagues from Košice and Ilmenau, however, an intensive cooperation between both groups did not materialise during these years.

In 1989 the political situation changed dramatically in Europe and, in particular, in Germany. The defeat of socialism, the new freedom, and the union of Germany also had, of course, effects on the scientific life at the universities in Germany. At that time, universities in East Germany had a lot of scientific connections to Eastern European universities, however, in



V súčasnosti nájdeme množstvo aplikácií teórie grafov v mnohých oblastiach nášho života, napríklad v informatike, chémii, fyzike a biológii. V šesťdesiatych rokoch minulého storočia sa teória grafov začala rýchlo rozvíjať, avšak v tom čase ešte bolo možné, aby sa všetci renomovaní odborníci tejto disciplíny stretli na jednom vedeckom kongrese.

Jedným z týchto priekopníkov kombinatoriky a teórie grafov bol aj profesor E. Jucovič. Od roku 1966 až do svojho odchodu do dôchodku pôsobil ako docent a neskôr ako profesor na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach. Jeho hlavným vedeckým záujmom bola kombinatorická geometria a príbuzné matematické oblasti ako teória grafov. Pod jeho vedením sa „Škola kombinatoriky v Košiciach“ vyvinula na významné a povšimnutiahodné centrum výskumu v oblasti kombinatorickej geometrie.

V roku 1963, krátko po svojej habilitácii, prišiel profesor H. Sachs z Martin-Luther-University Halle-Wittenberg v Nemecku na Technische Hochschule Ilmenau. Bol požiadaný, aby venoval svoje sily vytvoreniu a rozvoju matematického inštitútu v Ilmenau. V tom čase začal v Ilmenau zakladať skupinu teórie grafov. Nadviazal vzťahy s vynikajúcimi kolegami z diskkrétnej matematiky na celom svete a často ho nazývali „staviteľom mostov“ medzi matematikmi na Východe a Západe.

V tom čase sa profesor Jucovič aj profesor Sachs dostali do vedeckého kontaktu a vznikli prvé výskumné vzťahy medzi košickými a ilmenauskými grafármi. Tieto vzťahy sa pokúšali rozšíriť vzájomnými výskumnými návštevami kolegov z Košíc a Ilmenau, avšak intenzívna spolupráca medzi oboja skupinami sa v týchto rokoch neuskutočnila.

V roku 1989 sa politická situácia v Európe a najmä v Nemecku dramaticky zmenila. Porážka socializmu, nová sloboda a zjednotenie Nemecka mali samozrejme vplyv aj na vedecký život na univerzitách v Nemecku. V tom čase mali univerzity vo východnom Nemecku veľa vedeckých kontaktov s východoeurópskymi univerzitami, avšak v západnom Ne-

West Germany, such relationships were often poorly developed. Beside the extensive contacts with universities in Eastern Europe, the group of graph theorists in Ilmenau under the leadership of Professor Sachs had also developed intensive research relations with universities in West Germany, in Western Europe, and in many other countries of the world. We put to ourselves the aim of using this advantage for the future by further extending our relations to Eastern Europe and searching for new scientific partners there. Our versatile scientific relations should help these partners to develop new research contacts. The question was: *who could be a new partner for us and what would this new relationship look like?*



Ilmenaus group of graph theory from 1999 supplemented by Košice members - prof. S. Jendroľ and RNDr. I. Fabrici. (Zdroj: Stanislav Jendroľ.)

In 1991 the group of graph theorists in Ilmenau got an invitation to the *"Czechoslovak Conference on Combinatorics and Graph Theory"* in Zemplínska Šírava, June 1991, organized by the Košice School of Discrete Mathematics. This invitation had been accepted by four colleagues from Ilmenau including

mecku boli tieto vzťahy často slabo rozvinuté. Okrem rozsiahlych kontaktov s univerzitami vo východnej Európe skupina grafárov v Ilmenau pod vedením profesora Sachsa rozvíjala intenzívne výskumné vzťahy aj s univerzitami v západnom Nemecku, v západnej Európe a v mnohých ďalších krajinách sveta. Dali sme si za cieľ využiť túto výhodu do budúcnosti ďalším rozšírením našich vzťahov vo východnej Európe a hľadaním nových vedeckých partnerov v tejto oblasti. Naše všestranné vedecké vzťahy by mali týmto partnerom pomôcť nadviazať nové výskumné kontakty. Otázka znela: *kto by mohol byť pre nás novým partnerom a ako by mal tento nový vzťah vyzerat?*



Profesor Jochen Harant. (Foto: Stanislav Jendroľ.)

V roku 1991 dostala skupina grafárov v Ilmenau pozvanie na „Československú konferenciu o kombinatorike a teórii grafov“ na Zemplínskej Širave v júni 1991, ktorú organizovala Košická škola diskkrétnej matematiky. Toto pozvanie prijali štyria ko-

Professor H. Walther and me. At this conference we found a new scientific partner: the group of graph theorists from the Šafárik University in Košice under the leadership of Professor S. Jendroľ. Although we knew only a few of the participating colleagues from Košice from earlier times, we were warmly welcomed and we exchanged memories from the years in which both research groups under the leaderships of Professor Jucovič and Professor Sachs already had a few scientific contacts. Inspired by intensive discussions during the conference, a possible joint research topic for future collaboration was quickly identified: *"Cycles and Colourings in Graphs"*.

We decided to work together on that field and, furthermore, to originate a jointly organized workshop series of the same name devoted to this special topic on structural graph theory. Moreover, the conference site of these workshops should be always somewhere at a nice place in Slovakia to bring graph theorists from Eastern Europe, especially from Košice, together with colleagues from graph theory centers in Western Europe and countries like USA, Japan and others. At the *"Sixth International Conference on Geometry"* in Nahsholim, Israel, March 1992, Professor Jendroľ, Professor Walther, and I met again. There we made the final preparations for the first common Workshop *"Cycles and Colourings"* in Čingov at Slovak Paradise, September 1992. One question remained open: *how to get financial support for the realization of our research projects and for supporting mutual scientific visits and further common Workshops "Cycles and Colourings"?*

On March 11, 1993 a bilateral rector contract on cooperation in the field of discrete mathematics under the leadership of Professor Jendroľ and me was signed by the rectors Professor Bukovský (Košice) and Professor Köhler (Ilmenau) and the deans of both responsible faculties Professor Podhradský and Professor Walther. Based on this contract, we applied successfully for several grants such as the VEGA project, the APVV project, the project of the House of the International

legovia z Ilmenau vrátane profesora H. Walthera a mňa. Na tejto konferencii sme našli nového vedeckého partnera: skupinu grafárov z Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach pod vedením profesora S. Jendroľa. Hoci sme z predchádzajúcich čias poznali len niekoľkých zúčastnených kolegov z Košíc, boli sme srdečne prijatí a vymenili sme si spomienky na roky, v ktorých obe výskumné skupiny pod vedením profesora Jucoviča a profesora Sachsa už mali niekoľko vedeckých kontaktov. Inšpirovaní intenzívnymi diskusiami počas konferencie sme rýchlo vytipovali možnú spoločnú výskumnú tému pre budúcu spoluprácu: „*Cycles and Colourings*“.

Rozhodli sme sa spolupracovať v tejto oblasti a okrem toho sme sa rozhodli vytvoriť spoločne organizovanú sériu workshopov s rovnakým názvom venovanú tejto špeciálnej téme štruktúrálnej teórie grafov. Navyše, miesto konania týchto workshopov by malo byť vždy niekde na peknom mieste na Slovensku, aby sa tu stretli grafári z východnej Európy, najmä z Košíc, s kolegami z centier teórie grafov v západnej Európe a z krajín ako USA, Japonsko a iné. Na konferencii „*Sixth International Conference on Geometry*“ v Nahsholime v Izraeli



Stretnutie, na ktorom padli najdôležitejšie rozhodnutia o začiatku workshopov C&C, Nahsholim, Izrael, 1992. (Zľava: H. Walther, jeho manželka, manželka J. Haranta, S. Jendroľ.) (Foto: Jochen Harant.)

Contacts of Ministry of Education of Slovak Republic, and the project East Partnership of the German Academic Exchange Service. With these supports we were able to realize our planned targets and our collaboration has borne much fruit over the last 30 years.



Professor J. Harant (Ilmenau) during his lecture at the workshop, 1995.  
(Foto: Stanislav Jendroľ.)

Nowadays the Košice School of Discrete Mathematics belongs to the internationally renowned and widely accepted centers of graph theory in Europe and worldwide. In the years we have worked together, many common scientific papers have been published in renowned refereed mathematical journals. Meanwhile more than 30 Workshops "*Cycles and Colourings*" with more than 100 invited speakers from all over the world have been organized at attractive places in High Tatras and Slovak Paradise. The workshop "*Cycles and Colourings*" is undoubtedly one of the most important milestones from the founding of the Košice School of Discrete Mathematics to the present day. Unique and worth mentioning is the fact that over the years of the Workshop "*Cycles and Colourings*", a "*Graph Theory Hymn*" has been created, the text of which has

v marci 1992 sme sa profesor Jendroľ, profesor Walther a ja opäť stretli. Tam sme robili posledné prípravy na prvý spoločný workshop „*Cycles and Colourings*“ v Čingove v Slovenskom raji v septembri 1992. Jedna otázka zostala otvorená: *Ako získať finančnú podporu na realizáciu našich výskumných projektov a na podporu vzájomných vedeckých návštev a ďalších spoločných workshopov „Cycles and Colourings“?*

Dňa 11. marca 1993 bola podpísaná bilaterálna rektorská zmluva o spolupráci v oblasti diskkrétnej matematiky pod vedením profesora Jendroľa a mňa, rektormi profesorom Bukovským (Košice) a profesorom Köhlerom (Ilmenau) a dekanmi oboch príslušných fakúlt profesorom Podhradským a profesorom Waltherom. Na základe tejto zmluvy sme sa úspešne uchádzali o viaceré granty, napríklad o projekt VEGA, projekt APVV, projekt Domu zahraničných kontaktov MŠ SR a projekt East Partnership of the German Academic Exchange Service. Vďaka týmto podporám sa nám podarilo zrealizovať plánované ciele a naša spolupráca za posledných 30 rokov priniesla veľa ovocia.

V súčasnosti patrí Košická škola diskkrétnej matematiky k medzinárodne uznávaným a široko akceptovaným centrám teórie grafov v Európe a vo svete. Za roky našej spolupráce bolo publikovaných mnoho spoločných vedeckých prác v renomovaných recenzovaných matematických časopisoch. Medzitým sa na atraktívnych miestach Vysokých Tatier a Slovenského raja uskutočnilo viac ako 30 workshopov „*Cycles and Colourings*“ s viac ako 100 pozvanými prednášajúcimi z celého sveta. Workshop „*Cycles and Colourings*“ je nepochybne jedným z najdôležitejších míľnikov od založenia Košickej školy diskkrétnej matematiky až po súčasnosť. Unikátna a za zmienku stojí skutočnosť, že za roky trvania workshopov „*Cycles and Colourings*“ vznikla „*Hymna teórie grafov*“, ktorej text bol preložený do mnohých jazykov. Táto hymna sa vždy spieva na otváracích a záverečných ceremóniách seminára, a to každým účastníkom v jeho vlastnom jazyku.

been translated into many languages. This hymn is always sung at the opening and closing ceremonies of the workshop, by each participant in their own language.

The fingers on my hands are really nowhere near enough to list all the professors and research assistants involved in our project on both sides. Within the scope of this cooperation, many young researchers from Košice and Ilmenau have acquired an academic degree. Highlights of our successful collaboration and the special recognition of this by both universities involved are the awarding of honorary doctorates to Professor Jendroľ in 2018 by the Technical University of Ilmenau and to Professor Walther in 2000 and myself in 2015 by the P. J. Šafárik University of Košice.

These more than 30 years of a wonderful cooperation with the group of graph theorists from the Šafárik University in Košice under the leadership of Professor Jendroľ cover an essential part of my scientific life. We have begun this relationship as colleagues and meanwhile we have become really good friends. I have experienced a wonderful time of a successful and intensive cooperation with the colleagues from Košice.

Ďakujem veľmi pekne!



Prsty na rukách mi ani zďaleka nestačia na vymenovanie všetkých profesorov a výskumných asistentov, ktorí sa podieľali na našom projekte na oboch stranách. V rámci tejto spolupráce získali akademický titul mnohí mladí výskumníci z Košíc a Ilmenau. Vrcholmi našej úspešnej spolupráce a osobitným uznaním zo strany oboch zúčastnených univerzít je udelenie čestných doktorátov profesorovi Jendroľovi v roku 2018 Technickou univerzitou v Ilmenau a profesorovi Waltherovi v roku 2000 a mne v roku 2015 Univerzitou P. J. Šafárika v Košiciach.

Týchto viac ako 30 rokov úžasnej spolupráce so skupinou teoretikov grafov z Univerzity P. J. Šafárika v Košiciach pod vedením profesora Jendroľa pokrýva podstatnú časť môjho vedeckého života. Začali sme tento vzťah ako kolegovia a medzitým sme sa stali naozaj dobrými priateľmi. Zažil som krásne obdobie úspešnej a intenzívnej spolupráce s kolegami z Košíc.

Ďakujem veľmi pekne!

Niečo o autorovi:

Prof. Dr. Jochen Harant je vynikajúci a medzinárodne uznávaný vedec v oblasti diskretnej matematiky. Je znamenitý vysokoškolský pedagóg zaoberajúci sa rôznymi oblasťami teórie grafov, najmä hamiltonovskými problémami, polyedrálными grafmi, problémami farbenia, dominovaním a nezávislosťou v grafoch. Publikoval viac ako 85 vedeckých článkov v renomovaných vedeckých časopisoch a predniesol celý rad pozvaných prednášok na medzinárodných konferenciách. Viac ako 30 rokov spolupracoval s vedcami v oblasti teórie grafov na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach. Na základe tejto spolupráce mu v r. 2013 UPJŠ udelila čestný doktorát Dr. h. c.

Adresa autora:

Weimarer Straße 25, 98693 Ilmenau, Technical University of Ilmenau, Germany  
e-mail: jochen.harant@tu-ilmenau.de

### 3.3 A Tribute from Canada

*Pavol Hell a Geňa Hahn*

The Košice Combinatorics Seminar (KoKoS) is widely admired for its worldwide connections and for the scientific accomplishments of its members. It was established by Ernest Jucovič, whose work on combinatorial properties of polyhedra attracted much international attention. Some of this work was joint with his first students Stanislav Jendroľ and Marián Trenkler; it was often motivated by problems posed by Branko Grünbaum and Victor Klee, and offered elegant solutions to these problems. Particularly celebrated are the papers of Jendroľ and Jucovič on higher genus generalizations of Eberhard's theorem on convex polytopes with given vertex-vectors and face-vectors [9, 10]<sup>1</sup>. In addition to close contacts with mathematicians at the University of Washington, including Grünbaum and Klee, and also David Barnette, Jucovič also enjoyed strong connections with mathematicians in Budapest, especially László Fejes-Tóth, leading to his more geometric work on packings and coverings by geometric figures. In this way, the seminar had international connections from the very start.

The seminar's history started in the mid-1960s when the Faculty of Natural Sciences at the P. J. Šafárik University was established. In 1968, after two years of study, Stanislav Jendroľ and Marián Trenkler enrolled in mathematics on the recommendation of Prof. E. Jucovič. In our own parallel, Pavol, who also went to high school in Košice, had by that time already left Košice to study mathematics at Charles University in Prague. Even so, he had experienced many of the same influences as Jendroľ and Trenkler, including those by the future faculty at the Šafárik University such as Jucovič, and also Igor Kluvánek. Kluvánek often spoke at events

### 3.3 Pocta z Kanady

*Pavol Hell a Geňa Hahn*

Košický kombinatorický seminár (KoKoS) je široko obdivovaný pre svoje celosvetové kontakty a vedecké úspechy svojich členov. Založil ho Ernest Jucovič, ktorého práce o kombinatorických vlastnostiach mnohostenov vzbudili veľkú medzinárodnú pozornosť. Niektoré z týchto prác boli spoločné s jeho prvými študentmi Stanislavom Jendroľom a Mariánom Trenklerom; často boli motivované problémami, ktoré nastolili Branko Grünbaum a Viktor Klee. Oni však ponúkali elegantné riešenia týchto problémov. Osobitne slávne sú Jendroľove a Jucovičove práce o zovšeobecneniach Eberhardovej vety o konvexných mnohostenoch s danými vrcholovými a stenovými vektormi [9, 10] pre mapy na orientovateľných plochách vyšších rodov<sup>1</sup>. Okrem úzkych kontaktov s matematikmi na Washingtonskej univerzite, vrátane Grünbauma a Kleeho, a tiež Davida Barnetta, mal Jucovič silné kontakty aj s matematikmi v Budapešti, najmä s Lászlóm Fejes-Tóthom, čo viedlo k jeho geometrickejším prácam o pakovaní a pokrytiach geometrickými útvarmi. Seminár tak mal od začiatku medzinárodné kontakty.

História seminára sa začala písať v polovici 60-tych rokov 20. storočia, keď bola založená Prírodovedecká fakulta Univerzity P. J. Šafárika. V roku 1968, po dvoch rokoch štúdia, sa zapísali na základe odporúčania prof. E. Jucoviča na matematiku Stanislav Jendroľ a Marián Trenkler. Z našej dvojice Pavol, ktorý tiež chodil na strednú školu v Košiciach, v tom čase už odišiel z Košíc študovať matematiku na Karlovu univerzitu v Prahe. Aj tak však zažil mnohé z tých istých vplyvov ako Jendroľ a Trenkler, vrátane vplyvov budúcich pedagógov

---

<sup>1</sup> Poznámka editora: Pre bližšie k tejto tématike čitateľ nájde v podkapitole 5.2 na strane 220

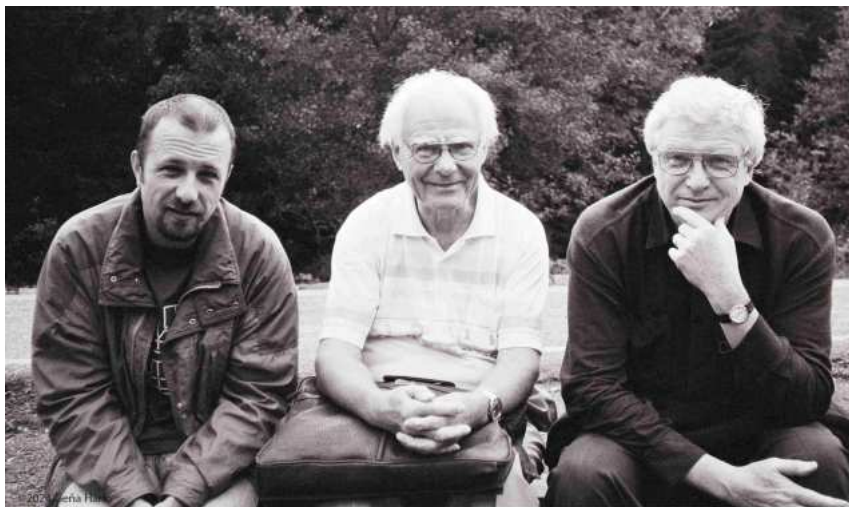
related to the Math Olympiads, where he worked to motivate many young pupils to choose mathematics as their career. This appears to have been an important motivating factor for Stano Jendroľ as well as for Pavol.



Cycles and colourings, 1998. (From left: N. Robertson (USA), M. Fiedler (Czechia), his wife, S. Jendroľ, P. Owens (United Kingdom) and M. Jacobson (USA).) (Foto: Geňa Hahn.)

The seminar evolved to include the many students of Jucovič, including Jendroľ, Trenkler, and also Mirko Horňák, Peter Mihók and others. In later years, the seminar was lead by Stano Jendroľ and included the students of Jendroľ, Horňák, and Mihók, including Tomáš Madaras (who leads the seminar currently), František Kardoš, Marián Klešč, Igor Fabrici, Martin Bača, Roman Soták, Gabriel Semanišin, and many many others, forming a big family of Jucovič's scientific descendants. The topological and geometric flavour persisted in the early work of Trenkler and Jendroľ; for example Jendroľ, answering a question of Grünbaum and Shepherd, constructed the first non-involuntary self-dual polyhedron [11]. But by now the work of the seminar participants covers most of classical graph theory, including questions associated with hamiltonian cycles, and graph colourings and their generali-

na fakulte Šafárikovej univerzity, ako bol Jucovič a tiež Igor Kluvánek. Kluvánek často vystupoval na podujatiach spojených s matematickými olympiádami, kde sa snažil motivovať mnohých mladých žiakov, aby si zvolili matematiku za svoje povolanie. Zdá sa, že to bol dôležitý motivačný faktor pre Stana Jendroľa, ako aj pre Pavla.



Cycles and colourings, 1998. (From left: B. Mohar (Slovenia), H. Sachs (Germany), N. Robertson (USA).) (Foto: Geňa Hahn.)

Do seminára sa zapojili mnohí Jucovičovi žiaci, vrátane Jendroľa, Trenklera, ale aj Mirka Horňáka, Petra Mihóka a ďalších. V neskorších rokoch viedol seminár Stano Jendroľ a zapojili sa doň Jendroľovi, Horňákovi a Mihókovi žiaci, vrátane Tomáša Madarasa (ktorý vedie seminár v súčasnosti), Františka Kardoša, Mariána Klešča, Igora Fabriciho, Martina Baču, Romana Sotáka, Gabriela Semanišina a mnohých ďalších, čím sa vytvorila veľká rodina Jucovičových vedeckých potomkov. Topologická a geometrická príchut' pretrvávala v raných prácach Trenklera a Jendroľa; napríklad Jendroľ, odpovedajúc na otázku Grünbauma a Shepherd, skonštruoval prvý neinvoltívny autoduálny mnohosten [11]. V súčasnosti však už práca účastníkov seminára pokrýva väčšinu klasickej teórie grafov vrátane otázok spojených s hamiltonovskými cyk-

zations. In particular, our own interests in graph homomorphisms and vertex partitions [2, 3, 4, 6] and especially on the achromatic numbers [1, 5] are related to the work of Mihók (such as, say, [12, 13]) and Horňák (for example, [7, 8]) respectively. These connections attracted us to the conference series *Cycles and Colourings*, regularly organized by the group.

We have attended several of these conferences and feel very grateful for the warm welcome and hearty hospitality of the organizers. Pavol particularly remembers how he was picked up in Poprad (some 40km from the conference site in Ružbachy) by Igor Fabrici. Igor additionally made an unscheduled stop in Spišská Belá to visit the house once inhabited by Pavol's grandparents, and holding special memories of Pavol's summer vacations.

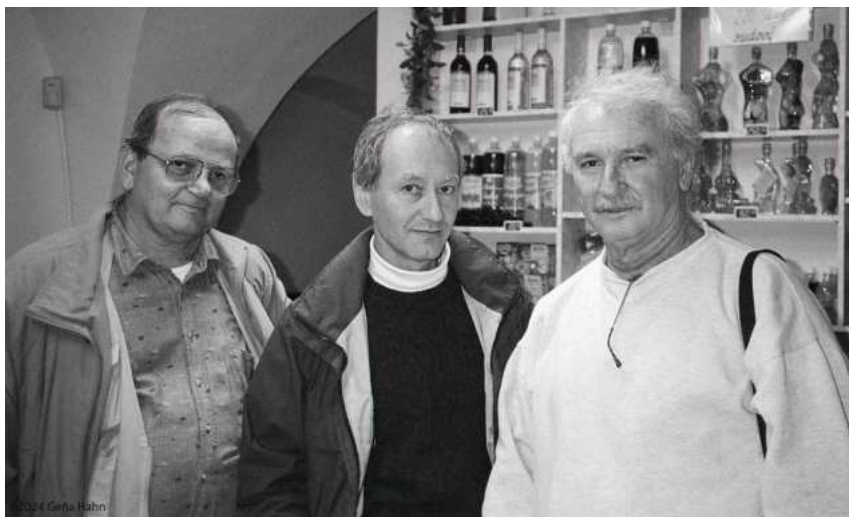


*Cycles and colourings*, 1998. (From left: H. Bielak (Poland) and H. Sachs.) (Foto: Geňa Hahn.)

What sets *Cycles and Colourings* apart from most other conferences and workshops are two things: the atmosphere and the Tatras. The latter provides a welcome break from the intensive work when participants go on a hike on Wednesday, with a choice of three difficulty levels. The former is the informality of the event, the no-pressure talks and problem ses-

lami a farbením grafov a ich zovšeobecneniami. Najmä náš vlastný záujem o homomorfizmy grafov a vrcholové rozklady [2, 3, 4, 6] a najmä o achromatické čísla [1, 5] súvisí s prácami Mihóka (napríklad [12, 13]), resp. s prácami Horňáka (napríklad [7, 8]). Tieto súvislosti nás prilákali na sériu workshopov *Cycles and Colourings*, ktoré táto skupina pravidelne organizuje.

Zúčastnili sme sa niekoľkých týchto konferencií a cítime sa veľmi vďační za srdečné prijatie a pohostinnosť organizátorov. Pavol si zvlášť pamätá, ako ho v Poprade (asi 40 km od miesta konania konferencie v Ružbachoch) vyzdvihol Igor Fabrici. Igor sa navyše neplánovane zastavil v Spišskej Belej, aby navštívil dom, ktorý kedysi obývali Pavlovi starí rodičia, a ktorý uchováva zvláštne spomienky na Pavlove letné prázdniny.



*Cycles and colourings*, 2001. (From left: S. Jendroľ, G. Hahn (Canada), M. Rosenfeld (USA).) (Foto: Geňa Hahn.)

Od väčšiny ostatných konferencií, workshopov a seminárov sa *Cycles and Colourings* líši dvoma vecami: atmosférou a Tatrami. Tá druhá poskytuje vítanú prestávku od intenzívnej práce, keď sa účastníci vyberú na túru v stredu, pričom si môžu vybrať jednu z troch úrovní náročnosti. Pri atmosfére sa odlišuje neformálnosťou podujatia, prednáškami bez aké-

sions, the friendliness of all, plus the singing. Many people learned Ryjáček's and Zelinka's *Graph Theory Anthem* [14], usually known as the *hymn*, at C&C. One particular event is remembered by all who were present – Stano Jendroľ interrupting the speaker and inviting everyone to watch television in the neighbouring room. It was 11 September 2001.

These conferences combine in a unique way intense and serious scientific endeavour with fun and adventure, as we tried to document with some enclosed photographs. What these photographs also illustrate is the wide appeal these conferences have, with participants coming from all corners of the globe, and including many of the leaders in the field.

Geňa's connection to Košice is shorter than Pavol's but still quite long. It began in 1979/1980 in Paris, where he and Mirko Horňák were both attending the *Séminaire Berge* every week. A few years later Geňa found a job in Montreal, received a research grant, and was able to travel to Slovakia for C&C and to visit Mirko. Mirko also came to Montreal, but unfortunately the two could neither prove nor disprove Geňa's hypothesis (stemming from [1]) that the achromatic number of a caterpillar<sup>2</sup> can be found in polynomial time, making it an exceptional tree.

Košice used to be a small town and Pavol fondly remembers his parents, who knew Jucovič, being relieved when Jucovič reassured them that studying mathematics as a profession was not a bad idea. Pavol was also touched when he later learned from Mirko Horňák that his father Ing. Ladislav Hell played bridge in the same bridge club as Mirko.

We feel strong connections to the Košice group, KoKoS, and the Cycles and Colourings conferences.



hokoľvek stresu a problémov v rokovaní, výnimočnou priateľskosťou všetkých a navyše spevom. Mnohí ľudia sa naučili Ryjáčkovu a Zelinkovu *Hymnu teórie grafov* [14], zvyčajne známou ako *hymna C&C*. Na jednu konkrétnu udalosť si spomínajú všetci prítomní – Stano Jendroľ prerušil prednášajúceho a pozval všetkých pozerať televíziu do susednej miestnosti. Bolo to 11. septembra 2001.

Tieto konferencie jedinečným spôsobom spájajú intenzívne a seriózne vedecké úsilie so zábavou a dobrodružstvom, čo sme sa pokúsili zdokumentovať na priložených fotografiách. Tieto fotografie tiež ilustrujú široký záber týchto konferencií, na ktoré prichádzajú účastníci zo všetkých kútov sveta, vrátane mnohých vedúcich osobností v tejto oblasti.

Geňovo spojenie s Košicami je kratšie ako Pavlovo, ale stále dosť silné. Začalo sa na prelome rokov 1979/1980 v Paríži, kde obaja s Mirkom Horňákom každý týždeň navštevovali *Bergeov seminár*. O niekoľko rokov neskôr si Geňa našiel prácu v Montreale, dostal výskumný grant a mohol cestovať na Slovensko na C&C a za Mirkom. Mirko tiež prišiel do Montrealu, ale žiaľ, obaja nedokázali ani dokázať, ani vyvrátiť Geňovu hypotézu (vyplývajúcu z [1]), že achromatické číslo húsenice<sup>2</sup> sa dá nájsť v polynomiálnom čase, čím sa stáva výnimočným stromom.

Košice boli kedysi malé mesto a Pavol si rád spomína, ako sa jeho rodičom, ktorí poznali Jucoviča, ulavilo, keď ich Jucovič ubezpečil, že štúdium matematiky ako povolania nie je zlý nápad. Pavol bol tiež dojatý, keď sa neskôr od Mirka Horňáka dozvedel, že jeho otec Ing. Ladislav Hell hrával bridž v tom istom bridžovom klube ako Mirko.

Cítíme silné väzby na košickú skupinu, KoKoS a workshopy Cycles and Colourings.

---

<sup>2</sup> Poznámka editora: húsenica (caterpillar) je strom, v ktorom po odobratí vrcholov stupňa 1, dostaneme cestu (path).

Niečo o autoroch:

Prof. Dr. Pavol Hell je kanadský matematik a informatik narodený na Slovensku. Z bývalého Československa odišiel v r. 1968. Je profesorom Teoretickej informatiky na Univerzite Simona Frasera v Burnaby (Kanada). Je špičkovým svetovým odborníkom vo výpočtovej kombinatorike, ktorá zahŕňa algoritmickú teóriu grafov a zložitosť grafových problémov. PhD. získal pod vedením svetoznámeho matematika G. Sabidusiho na Montrealskej univerzite. Je autorom viac ako 250 pôvodných vedeckých prác a jednej monografie. Na tieto práce má viac ako 10 400 citácií. Jeho *h*-index je aspoň 50. Spomínaná monografia, ktorú napísal s prof. Nešetřilom, bola citovaná aspoň 1 500-krát. Je členom redakčných rád piatich špičkových svetových časopisov. Navyše, dlhodobo bol Managing Editorom v časopise *Journal Graph Theory*.

Prof. Dr. Geňa Hahn je známy kanadský informatik pracujúci na Univerzite v Montreale. Narodil sa v Prahe, kde aj vyrástol. Vysokoškolské vzdelanie získal v Kanade. Je svetovým odborníkom v teórii grafov a príbuzných oblastiach ako kombinatorika, algoritmy a zložitosť, a komunikačné siete. Je autorom, resp. spoluautorom 62 pôvodných vedeckých prác. Na tieto práce má viac ako 1 040 citácií. Jeho Hirshov *h*-index je aspoň 14. Dlhodobý záujem o filmové umenie ho prirodzene priviedol k fotografii, ktorá sa od roku 1984 stala jednou z jeho hlavných činností. Od tej doby žije v lietadlách medzi Montrealom, Parížom, Prahou a Vancouverom a delí svoj stále vzácnejší čas medzi fotografiu, hudbu, jedlo, matematiku, priateľov a víno.

Adresy autorov:

Computing Science, Simon Fraser University, 8888 University Drive, Burnaby  
B.C., Kanada

Faculté des arts et des sciences - Département d'informatique, Montréal, Kanada  
e-mail: pavol@sfu.ca, gena.hahn@umontreal.ca

---

LITERATÚRA

---

- [1] M. Farber, G. Hahn, P. Hell, and D.J. Miller, *Concerning the achromatic number of graphs*, J. Combinatorial Theory, B 40 (1986), 21–39.
- [2] T. Feder, P. Hell, S. Klein, and R. Motwani, *List partitions*, SIAM J. on Discrete Math., 16 (2003), 449–478.
- [3] G. Hahn and C. Tardif, *Graph homomorphisms: structure and symmetry*, Graph symmetry, G. Hahn, G. Sabidussi, eds., ASI Ser. C, Kluwer, 1997, pp. 107–166
- [4] Geňa Hahn and G. MacGillivray, *Graph homomorphisms: computational aspects and infinite graphs*, manuscript 2012, Research Gate.
- [5] P. Hell and D.J. Miller, *Graphs with given achromatic number*, Discrete Math., 16 (1976), 195–207.
- [6] P. Hell and J. Nešetřil, *Graphs and Homomorphisms*, Clarendon Press, Oxford, 2004.
- [7] M. Horňák and J. Puntigán, *On the achromatic number of  $K_m \times K_n$* , Graphs and Other Combinatorial Topics, Proceedings of the Third Czechoslovak Symposium on Graph Theory, 1983, pp. 118–123.
- [8] M. Horňák and Š. Pčola, *Achromatic number of  $K_5 \times K_n$  for small  $n$* , Czechoslovak Math. J., 53 (2005), 963–988.
- [9] S. Jendroľ and E. Jucovič, *On the toroidal analogue of Eberhard's theorem*, Proc. London Math. Soc., 25 (1975), 385–398.
- [10] S. Jendroľ and E. Jucovič, *On a conjecture by B. Grünbaum*, Discrete Math., 2 (1972), 35–49.

- [11] S. Jendroř, *A non-involutory selfduality*, Discrete Math., 74 (1989), 325–326.
- [12] P. Mihók, *Additive hereditary properties and uniquely partitionable graphs*, Graphs, Hypergraphs and Matroids, Zielona Góra, 1985, pp. 49–58.
- [13] J. Kratochvíl and P. Mihók, *Hom-properties are uniquely factorizable into irreducible factors*, Discrete Math., 213 (2000), 189–194
- [14] [https://home.zcu.cz/~ryjacek/publications/hymn\\_hist\\_c.php](https://home.zcu.cz/~ryjacek/publications/hymn_hist_c.php), in Czech.

## 3.4 Ako ovplyvnila môj profesionálny život Košická škola diskkrétnej matematiky

*Mirko Horňák*

V texte sa prelínajú moje spomienky na Košický kombinatorický seminár, na vedecké podujatia, ktorých som sa zúčastnil, na mojich kolegov a spolupracovníkov, na osobnosti teórie grafov, ktoré som stretol, a na workshop C&C (Cycles and Colourings), na ktorého organizácii som mal česť dlhodobo sa podieľať.

Študovať na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ som začal v akademickom roku 1970/71, a mal som to šťastie, že už v letnom semestri ma prof. Jucovič pozval do svojho seminára z teórie grafov. Dostal som sa tak do spoločnosti starších kolegov Stana Jendroľa, Mariána Trenklera, Petra Mihóka a Fera Olejníka.

Mojím prvým vystúpením na seminári bol referát z časti publikácie [6], ktorá vznikla na základe autorovej dizertačnej práce. Prof. Jucovič ocenil, že sa mi podarilo nájsť nepresnosť v autorovej úvahe a aj navrhnúť vhodnú korekciu.

Členovia seminára boli za svoju aktivitu odmenení účasťou na letnej škole v Zlatej Idke; tá je zároveň považovaná za šiestu československú konferenciu z teórie grafov. Prof. Jucovič ako organizátor zabezpečil sériu prednášok vychádzajúcich hviezd odboru, ktorými boli László Lovász a Hansjoachim Walther. Frekventantom letnej školy sa okrem odborného programu rátala aj možnosť zahrať si s prednášateľmi futbal.

Prof. Jucovič motivoval účastníkov svojho seminára zapojiť sa do študentskej vedeckej a odbornej činnosti. Vyústilo to do viacerých prác, ktoré boli úspešné na fakultnej úrovni, ale aj v rámci celého Československa. Vystúpenia na študentských vedeckých podujatiach boli dobrou prípravou na prezentáciu výsledkov na československých konferenciách z teórie grafov.

Prof. Jucovič sa staral o svoj seminár naozaj všestranne. Zapájal jeho členov do riešenia výskumných projektov, ktoré

viedol. Pozýval do Košíc prednášať významných odborníkov zo zahraničia. Umožňoval svojim žiakom etablovať sa v československej komunite teórie grafov účinkovaním na celoštátnych konferenciách; tie sa od roku 1969 konali pravidelne raz ročne, pričom pri ich organizácii sa striedali výskumné centrá z celej republiky. Vo dvoch prípadoch, keď sa konferencia konala na Zemplínskej šírave (1978 a 1983), bol organizátorom prof. Jucovič. Vždy vyberal hostí tak, aby ich prednášky pomáhali napredovaniu Košickej školy diskkrétnej matematiky. Okrem iného prvú šíravskú konferenciu poctil svojou prítomnosťou aj Paul Erdős.



Fero Olejník a Mirko Horňák, Československá konferencia, Zemplínska šírava, 1978. (Zdroj: Mirko Horňák.)

Ja som v akademickom roku 1979/80 absolvoval šesťmesačný študijný pobyt na l'École des hautes études en sciences sociales v Paríži, ktorý prispel k môjmu odbornému, ale tiež jazykovému rastu. Spoznal som počas neho viacero popredných francúzskych odborníkov teórie grafov (Claude Berge, Jean-Claude Bermond, André Bouchet, François Jaeger, Jean-Marie Laborde, Pierre Rosenstiehl) a tiež Geňu Hahna, kto-

rého účinkovanie v metropole nad Seinou sa časovo značne prekrývalo s mojím.

Prínosná bola pre mňa trojmesačná stáž na Banachovom centre vo Varšave na jeseň 1987. Išlo o semester venovaný kombinatorike a teórii grafov, v rámci ktorého vybratí prednášatelia (jedným z nich bol aj prof. Jucovič) prezentovali frekventantom rôznorodé tematické celky. Obdobie to bolo z viacerých uhlov pohľadu zaujímavé. Kvôli stravovaniu sme napríklad dostali lístky na mäso... S mojím spolubývajúcim Miřom Tkáčom sa nám podarilo zorganizovať medzinárodnú bridžovú partiu so Zdzichom Skupieňom, šéfom celého semestra, a s Miroslavom Fiedlerom, ďalším z prednášajúcich hostí.

V roku 1991 sa konala už tretia československá konferencia z teórie grafov, ktorej dejiskom bola Zemplínska Šírava. Organizácia v tomto prípade prešla do mladších rúk, predsedom organizačného výboru bol Stano Jendroř. Bolo to prvý raz v histórii Kořickej školy diskreťnej matematiky, keď pri príprave konferenčných materiálov bol použitý typografický systém (AMS)TeX. Konferencia sa stala východiskovým bodom výrazného zintenzívnenia kořickej spolupráce s Technische Universität Ilmenau, ktorá sa okrem iného prejavila aj kreovaním a dlhoročným spoločným organizovaním workshopu C&C. O workshoppe z hľadiska jeho vzniku však určite uvádzajú svoje povolanejši, predovšetkým Stano Jendroř ako jeho hlavný ideový otec.

Prvý workshop sa uskutočnil v roku 1992 v Slovenskom raji v príjemnej, takpovediac rodinnej atmosfére. Okrem odborného programu sa zapísal do povedomia výletom cez Prielom Hornádu poznamenaným orientačnými „nepresnosťami“ (Katkaštrofa na počesť Katky Cechlárovej). Peter Owens to v istom momente komentoval lakonicky: *It seems this river becomes a cycle*. Aby sa následne výletníci neocitli bez večere, vyslali do ubytovacieho zariadenia predsunutú hliadku (high speed group), v ktorej okrem mňa boli Zdzich Skupieň a Vlado Źelezník. Misia bola úspešne splnená, ako sme sa

však dodatočne dozvedeli, náš poľský priateľ na ňu nespomínal v najlepšom kvôli svojej obuvi, v ktorej jeho nohy trpeli.



Výlet C&C 1995 (splav Dunajca). (Zľava: Jochen Harant, Peter Owens, Anja Pruchnewski, Heinz-Joachim Presia, Mirko Horňák.) (Zdroj: Mirko Horňák.)

Počínajúc druhým ročníkom workshopu som bol prizvaný do organizačného výboru. To už bolo zmenené pôsobisko, došlo k presunu do Vysokých Tatier (postupne Nový Smokovec, Stará Lesná, Tatranská Štrba, opäť Nový Smokovec a najnovšie Poprad). Workshop sa konal každoročne a postupne si vybudoval pozitívne renomé najprv v európskom a neskôr aj v celosvetovom meradle. Svedčí o tom zoznam pozvaných rečníkov z rokov 1992 – 2011, ktorý si možno pozrieť v predslve [3]. Bol medzi nimi aj už spomínaný Paul Erdős; za zmienku stojí, že preukázal dobrú turistickú zdatnosť počas výletu do Belianskej jaskyne. Predstava o matematike prezentovanej počas workshopov C&C sa dá získať z webstránky <https://candc.upjs.sk>, ale najmä zo špeciálnych čísel časopisov *Tatra Mountains Mathematical Publications* (workshopy 1994, 1997) a *Discrete Mathematics* (workshopy 1999, 2001, 2003, 2006, 2008, 2011). Košická škola diskkrétnej matemati-



ky dostala dôveru česko-slovenskej komunity teórie grafov tiež pri organizovaní podujatia Seventh Czech-Slovak International Symposium on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications. To sa konalo v roku 2013 v Košiciach, a aj z neho bolo pripravené špeciálne číslo *Discrete Mathematics*.

Moja tretia spomienka na Paula Erdősa je, žiaľ, smutná. V Banachovom centre sa počas piatich týždňov v auguste a septembri 1996 uskutočnil minisemester Selected Topics in Discrete Mathematics. V rámci štvrtého tematického týždňa odznela prednáška, ktorú si pripravil Uncle Paul. Ešte predtým sa mi podarilo nakrútiť videozáber z jeho krátkej debaty s Petrom Mihókom pred vchodom do budovy centra. Deň na to sme s prednášateľom boli na večeri (Zsolt Tuza, Doug West, Peter Mihók a pravdepodobne aj Zbyszek Lonc, šéf minisemestra). Ale ďalší deň, 20. septembra, nás už zaskočila správa, že geniálny maďarský matematik zomrel vo varšavskej nemocnici v dôsledku infarktu. Dodnes ma mrzí, že som na tú večeru so sebou nevezal videokameru...

Význam Paula Erdősa pre svetovú matematiku vidno z hojne používaného pojmu Erdősovho čísla. V grafe spoluautorov sú vrcholmi autori a dvaja autori v ňom tvoria hranu, ak majú spoločnú publikovanú prácu. Erdősovo číslo je definované len pre autora patriaceho do Erdősovho komponentu súvislosti ako jeho vzdialenosť od Erdősovho vrcholu. Je to teda vo všeobecnosti dynamická záležitosť vyvíjajúca sa v čase. Zaujímavá je hypotéza Igora Podlubného, podľa ktorej by Košice mohli byť veľmi vysoko v tabuľke hustoty výskytu matematikov s Erdősovým číslom 2...

Workshopy C&C výdatne pomohli Košičanom pri nadväzovaní odborných kontaktov so zahraničnými centrami zaoberajúcimi sa teóriou grafov. Ja som spolupracoval predovšetkým s kolegami, ktorých domovskou inštitúciou je krakovská Akademia Górniczo-Hutnicza (Sylwia Cichacz, Rafał Kalinowski, Antek Marczyk, Mariusz Meszka, Monika Piłśniak, Jakub Przybyło, Zdzich Skupień, Mariusz Woźniak). Spolupráca sa realizovala počas početných vzájomných

návštev, ako aj spoločnej účasti na vedeckých podujatiach (náprotivkom našich workshopov boli krakovské workshopy 3in1, ktorých tradíciu založil Zdzich Skupień) a vyústila v spoluautorstve viacerých článkov vo vedeckých časopisoch. S Mariuszom Woźniakom sme svoje jazykové zdatnosti podporovali dohodou, podľa ktorej sme sa v pondelok, streda a piatok dorozumievali poľsky, v utorok a vo štvrtok slovensky, v sobotu francúzsky a v nedeľu anglicky.



Výlet C&C 2006. (Zľava: Mariusz Woźniak, Mirko Horňák, Sylwia Cichacz, Jakub Przybyło, Monika Pilśniak.) (Zdroj: Mirko Horňák.)

Prvým doktorandom, ktorého som vyškolil, bol Roman Soťák. Počas jeho vedeckej prípravy nás zaujal problém spätý s vrcholy rozlišujúcim chromatickým indexom kompletného bipartitného grafu  $K_{n,n}$  (pozri [8]). Nevedeli sme sa však stotožniť s niektorými krokmi dôkazových úvah. Rezultovali z toho dva naše články [4] a [5], ktorých výsledky vyvracajú buď priamo alebo nepriamo zopár tvrdení spomenutej práce [8].

Jedným z mojich úspešne skončivších doktorandov je tiež Števo Pčola. Pod mojím vedením sa venoval už skôr diplomovej práci [7]. Jej téma, achromatický index kompletných

grafov, sa dostala do povedomia najmä kvôli článku [1]; autorovi sa v ňom podarilo veľmi invenčným spôsobom previazať hodnotu achromatického indexu kompletného grafu  $K_n$ , kde  $n = q^2 + q + 1$  a  $q$  je nepárne, s existenciou konečnej projekívnej roviny rádu  $q$ . Diplomant vo svojej práci dokázal, že achromatický index  $K_{14}$  je 39 (taký istý ako achromatický index  $K_{13}$ ). V tom čase bolo pritom najmenšie  $n$ , pre ktoré nebol známy achromatický index  $K_n$ , práve  $n = 14$ . Mohlo by sa zdať, že ide o príliš špeciálny výsledok, André Bouchet sa však v rozhovore so mnou na konto grafu  $K_{14}$  z pohľadu určenia jeho achromatického indexu vyjadril „c'est un monstre“ (je to monštrum). Tomu zodpovedá rozsah práce [7], ako aj fakt, že nikdy nedošlo k pokusu o jej časopisecké publikovanie. Doktorandov výskum som v súlade s tým orientoval skôr iným smerom.



Výlet C&C, 1996. (V popredí zľava Mirko Horňák a Peter Mihók.)  
(Foto: Geňa Hahn.)

Ako perličku pripájam príbeh uverejnenia článku [2], v ktorom bola hypotéza o susedov rozlišujúcom indexe (pozri [9]) dokázaná pre planárne grafy s maximálnym stupňom vrcholu aspoň 12. Práca vznikla skombinovaním dvoch rukopisov s tým istým výsledkom zaslaných časovo zhruba paralelne

do dvoch rôznych časopisov (v mojom prípade išlo o *Journal of Graph Theory* a v prípade mojich spoluautorov o *Discrete Applied Mathematics*). Naša spoločná vďaka patrí obom redakciám, ktoré dokázali hladko zmanažovať celý nie úplne jednoduchý posudzovací a publikačný proces.

Niečo o autorovi:

Informácie o autorovi nájdete v kapitole 2. Významné osobnosti Košickej školy diskkrétnej matematiky na strane 61.

Adresa autora:

Ústav matematiky, Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Jesenná 5, 040 01 Košice  
e-mail: [mirko.hornak@upjs.sk](mailto:mirko.hornak@upjs.sk)

---

## LITERATÚRA

---

- [1] A. Bouchet, *Indice achromatique des graphes multiparti complets et réguliers*, Cahiers du Centre d'études de recherche opérationnelle 20 (1978), 331–340.
- [2] M. Horňák, D. Huang and W. Wang *On Neighbor-Distinguishing Index of Planar Graphs*, Journal of Graph Theory 76 (2014), no. 4, 262–278.
- [3] M. Horňák and S. Jendroľ, *Preface*, Special Issue: Cycles and Colourings 2011, Discrete Mathematics 313 (2013), no. 19, 1833–1834.
- [4] M. Horňák and R. Soták, *The fifth jump of the point-distinguishing chromatic index of  $K_{n,n}$* , Ars Combinatoria 42 (1996), 233–242.
- [5] M. Horňák and R. Soták, *Localization of jumps of the point-distinguishing chromatic index of  $K_{n,n}$* , Discussiones Mathematicae Graph Theory 17 (1997), no. 2, 243–251.
- [6] J. Malkevitch, *Properties of Planar Graphs with Uniform Vertex and Face Structure*, Memoirs of the American Mathematical Society 99, Providence, Rhode Island 1970.
- [7] Š. Pčola, *Achromatický index grafu  $K_{14}$* , Diploma Work, Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice 1998.
- [8] N. Zagaglia Salvi, *On the value of the point-distinguishing chromatic index of  $K_{n,n}$* , Ars Combinatoria 29B (1990), 235–244.
- [9] Z. Zhang, L. Liu and J. Wang, *Adjacent strong edge coloring of graphs*, Applied Mathematics Letters 15 (2002), no. 5, 623–626.

### 3.5 The High Tatras are really a beautiful place on Earth

*Arnfried Kemnitz*

My affiliation is Technical University of Braunschweig in the northern part of Germany where I am a Professor of Mathematics. I first visited the Workshop on Cycles and Colourings in 1998 when it was organized in Stará Lesná. Since then I participated more than 20 times at this workshop in Stará Lesná, Tatranská Štrba, and Nový Smokovec. Moreover, I attended different workshops in Herľany.

During the years, a close scientific cooperation developed



Trip to the mountains of the High Tatras, 2012. (Foto: Arnfried Kemnitz.)

## 3.5 Vysoké Tatry sú skutočne nádherným miestom na Zemi

*Arnfried Kemnitz*

Pôsobím ako profesor matematiky na Technickej univerzite v Braunschweigu v severnej časti Nemecka. Workshop Cycles and Colourings som prvýkrát navštívil v roku 1998, keď sa uskutočnil v Starej Lesnej. Odvtedy som sa na tomto workshope zúčastnil viac ako 20-krát v Starej Lesnej, Tatranskej Štrbe a Novom Smokovci. Okrem toho som sa zúčastnil iných workshopov v Herľanoch. V priebehu rokov sa rozvinula úzka vedecká spolupráca s niektorými kolegami z Košíc a tiež s ďalšími účastníkmi týchto workshopov. Spoločne sme napísali pomerne veľa matematických prác publikovaných v rôznych medzinárodných časopisoch.



Herlianský gejzír, 2008. (Foto: Arnfried Kemnitz.)

with some colleagues from Košice and also with other participants of these workshops. Quite a lot of mathematical papers in different international journals were created by us.

### *Memories of events*

During my first visit in Herľany in 2003 I gave a talk on  $[r, s, t]$ -Colorings of Graphs. For me this was a really nice topic but suddenly from one moment to the other the whole audience got up and run out. I did not have any explanation for this behaviour of my colleagues. But after some moments I realized that the outside geyser erupted and everybody of the audience wanted to take part in this spectacle. Finally, after some time I could continue with my presentation. And the spectacle was really great!



J. Harant, A. Kemnitz, H. Walther on C&C, 1998. (Foto: Geňa Hahn.)

During my several participations of the workshop the colleagues from Košice organized beautiful trips to several mountains of High Tatra. Excursion day always was Wed-



*Spomienky na udalosti*

Počas mojej prvej návštevy v Herľanoch v roku 2003 som predniesol prednášku na tému  $[r, s, t]$ -farbenie na grafoch. Pre mňa to bola naozaj pekná téma, ale zrazu sa z jednej chvíle na druhú celé publikum zdvihlo a vybehlo von. Nemal som pre toto správanie kolegov žiadne vysvetlenie. Ale po chvíli som si uvedomil, že vonku vytryskol gejzír a všetci z publika sa chceli zúčastniť na tomto predstavení. Konečne som po nejakom čase mohol pokračovať vo svojej prezentácii. A to predstavenie bolo naozaj skvelé!



Výlet vo Vysokých Tatrách počas workshopu C&C, Kriváň, 2004. (Zľava: Ingo Schiermeyer a Arnfried Kemnitz.) (Foto: Ingo Schiermeyer)

Počas mojej niekoľkoročnej účasti na workshopoch kolegovia z Košíc zorganizovali krásne výlety do viacerých miest Vysokých Tatier. Dňom výletu bola vždy streda. Všetky tieto dobre naplánované výlety na vrcholy som si užíval takmer nezávisle od počasia. Počas výletov sme mali hmlu aj dážď, ale veľmi často aj pekné slnečné lúče. Iba raz bolo počasie na výstup do hôr zlé, a preto sa namiesto toho zorganizoval výlet do mesta. Je to naozaj veľmi pekné miesto na zemi!

nesday. I enjoyed all these well-guided trips up to the peaks nearly independently of the weather. We had fog and rain but very often nice sunshine during our trips. Only once the weather was too bad going to the mountains, and therefore some city excursion was organized instead. This is really a very nice spot on earth!

Beside all the interesting talks and presentations the Workshop on Cycles and Colourings contains two special topics, namely the Welcome party on Mondays and the Farewell party on Thursdays. During these evenings we enjoyed singing Slovak and international songs, discussed all the problems of the world, and tasted the excellent Slovak food and drinks.

Okrem všetkých zaujímavých prednášok a prezentácií obsahuje workshop Cycles and Colourings dve špeciálne udalosti, a to uvítací večierok v pondelok a rozlúčkový večer vo štvrtok. Počas týchto stretnutí sme sa zabávali pri speve slovenských a medzinárodných piesní, diskutovali o všetkých problémoch sveta a ochutnávali výborné slovenské jedlá a nápoje.

Niečo o autorovi:

Prof. Dr. Arnfried Kemnitz je popredný nemecký matematik so širokým spektrom záujmov. Okrem Diskrétnej matematiky ho zaujímajú aj otázky Logiky a základov matematiky ako aj topológie. Je veľmi známy vďaka svojim výsledkom o rôznych typoch zafarbení grafov. Je profesorom matematiky na Ústave výpočtovej matematiky na Technickej univerzite v Braunschweigu (Nemecko). Je autorom, resp. spoluautorom 83 pôvodných vedeckých prác (podľa zbMAT) a 12 kníh. Na svoje práce zaznamenal viac ako 350 citácií. Jeho  $h$ -index je aspoň 10 (aspoň 13 podľa Research Gate). Je veľkým priateľom Slovenska a častým návštevníkom podujatí organizovaných košickými matematikmi.

Adresa autora:

Institut für Analysis und Algebra, Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät, Technische Universität Braunschweig v Nemecku  
e-mail: a.kemnitz@tu-bs.de

## 3.6 A pleasure to stay and collaborate with the Košice group

*Borut Lužar*

I still remember my first research visit to Košice in early August 2009. Most days of the visit the temperature was almost 40 degrees, and it did not drop much during the nights. I did however like the stay very much for the same reason I like all the stays and collaboration with the Košice group, that is the people I had and have the opportunity to work with. During that first visit, our host was František Kardoš, with whom we already had some previous collaboration on various properties of fullerene graphs, which are graphs modeling the molecular structure of more famous fullerenes: molecules forming many modern important materials. The visit was intended to prove that in every fullerene graph one can find a Hamiltonian cycle, that is a cycle in the graph visiting all the vertices exactly once. We failed to find the proof at that time, but several years later František managed to prove the property. Apart from the heat, Hamiltonicity of fullerene graphs, and the people, I have another memory from that first visit: excellent homemade bryndzove halušky, which we had at František's apartment.

After that first visit, my collaboration with people from Košice started to bloom. In 2010, František came for a visit together with Roman Soták and David Hudák and we worked on a problem in the field of edge coloring, which is the main field of research of Roman and as well as of mine. Consequently, we started working on various projects together with Roman and this resulted in over twenty coauthored articles in the last 10 years, where of course we collaborated with many other colleagues from Košice; in particular, we coauthored articles with 15 researchers and doctoral students from the

## 3.6 Příjemnost pobudnutí a spolupracovat s košickou skupinou

*Borut Lužar*

Dobře si pamätám na svoju prvú výskumnú návštevu Košíc začiatkom augusta 2009. Väčšinu dní návštevy bola teplota takmer 40 stupňov a počas nocí veľmi neklesala. Pobyt sa mi však veľmi páčil z rovnakého dôvodu, z akého sa mi páčili všetky pobyty a spolupráca s košickou skupinou, teda ľudia, s ktorými som mal a mám možnosť pracovať. Počas tohto prvého pobytu bol našim hosťiteľom František Kardoš, s ktorým sme už predtým spolupracovali na rôznych vlastnostiach fullerénových grafov, čo sú grafy modelujúce molekulu štruktúru známych fullerénov: molekúl tvoriacich mnohé moderné dôležité materiály. Cieľom návštevy bolo dokázať, že v každom fullerénovom grafe možno nájsť hamiltonovský cyklus, teda cyklus v grafe, ktorý navštívi všetky vrcholy práve raz. Dôkaz sa nám vtedy nepodarilo nájsť, ale o niekoľko rokov neskôr sa Františkovi podarilo túto vlastnosť dokázať. Okrem horúčav, Hamiltonovho grafu a ľudí, mám z tej prvej návštevy ešte jednu spomienku: výborné domáce bryndzové halušky, ktoré sme mali u Františka v byte.

Po tejto prvej návšteve sa začala rozvíjať moja spolupráca s Košičanmi. V roku 2010 prišiel František na návštevu spolu s Romanom Sotákom a Dávidom Hudákom a pracovali sme na probléme z oblasti farbenia hrán, čo je hlavná oblasť Romanovho a aj môjho výskumu. Následne sme s Romanom začali pracovať na rôznych projektoch, čoho výsledkom je viac ako dvadsať spoluautorských článkov za posledných 10 rokov, kde sme samozrejme spolupracovali s mnohými ďalšími kolegami z Košíc; konkrétne sme boli spoluautormi článkov s 15 vedeckými pracovníkmi a doktorandmi z Ústavu matematiky Prírodovedeckej fakulty Univerzity P. J. Šafárika.

Department of Mathematics of Faculty of Science at P. J. Šafarik University. This shows how much influence the Košice group had to my career.

A major part in our collaboration with Roman was also Martina Mockovčiaková, who was finishing her doctoral studies in the same year with me; we both defended our theses in 2013. Soon after her defense, she started a post-doctoral position in Pilsen, but we continued with regular research work between our three cities until a deadly disease finished her career in 2021.

Clearly, a big opportunity to meet researchers and their mathematical problems are seminars and conferences. The conference organized every year by the Košice group is the Workshop on Cycles and Colourings, which took place in High Tatras every time I attended it. It is a middle-sized conference with a relatively stable core of about 40 people which attend it almost every year. I first attended the conference in 2012 and it was my first conference ever to attend. Apart from a number of interesting talks, I remember especially the talk of Jakub Przybylo from Krakow on facial non-repetitive edge colorings. This was the first time I met him and after several years we became good friends. The second memory from my first conference is the conference trip to Priečne sedlo. Every year, the conference organizers also organize a conference trip, which is basically comprised of three possible hikes, from the easiest to the hardest, intended for the most experienced hikers.

After my first participation at the conference, I became a relatively regular attendee; this year (the year 2024), I will attend my 10th edition of it, and I am looking forward to meet all the people there again since the day the previous edition ends.

The second important series of events are the Košice combinatorial seminars called KOKOS, to which I attended many times as the speaker and many more times as a listener. I was lucky enough to acquire two 10-months post-doctoral stays

To svedčí o tom, aký veľký vplyv mala košická skupina na moju kariéru.

Na našej spolupráci s Romanom sa významne podieľala aj Martina Mockovčiaková, ktorá v tom istom roku ako ja končila doktorandské štúdium; obaja sme v roku 2013 obhájili dizertačné práce. Krátko po obhajobe nastúpila na postdoktorandské miesto v Plzni, ale pokračovali sme v pravidelnej výskumnej práci medzi našimi tromi mestami, až kým jej smrteľná choroba neukončila kariéru v roku 2021.

Je zrejmé, že veľkou príležitosťou na stretnutie s výskumníkmi a ich matematickými problémami sú semináre a konferencie. Konferenciou, ktorú každoročne organizuje košická skupina, je workshop Cycles and Colourings, ktorý sa konal vo Vysokých Tatrách vždy, keď som sa ho zúčastnil. Je to stredne veľká konferencia s pomerne stabilným jadrom asi 40 ľudí, ktorí sa jej zúčastňujú takmer každý rok. Prvýkrát som sa na nej zúčastnil v roku 2012 a bola to moja vôbec prvá konferencia, na ktorej som sa zúčastnil. Okrem množstva zaujímavých prednášok si pamätám najmä prednášku Jakuba Przybyła z Krakova o faciálne nerepetitívnych zafarbeniach hrán. Bolo to moje prvé stretnutie s ním a po niekoľkých rokoch sme sa stali dobrými priateľmi. Druhou spomienkou z mojej prvej konferencie je konferenčný výlet do Priečneho sedla. Organizátori konferencie každoročne organizujú aj konferenčný výlet, ktorý sa v podstate skladá z troch možných túr, od najľahšej po najťažšiu, určenú pre najskúsenejších turistov. Po mojej prvej účasti na konferencii som sa stal jej pomerne pravidelným účastníkom, tento rok (rok 2024) sa zúčastním na jej desiatom ročníku a teším sa, že sa tam opäť stretnem so všetkými ľuďmi z predchádzajúceho ročníka.

Druhou významnou sériou podujatí sú košické kombinatorické semináre s názvom KOKOS, na ktorých som sa viackrát zúčastnil ako prednášajúci a ešte viackrát ako poslucháč. Mal som to šťastie, že som tam získal dva 10-mesačné postdoktorandské pobyty a počas nich som bol pravidelným účastní-

there, and during these stays, I was a regular participant of the seminar. I particularly liked it, since the topics were usually very related to the work I was doing in my research. Mostly the topics from colorings of graphs or from properties of planar graphs were presented. The study of planar graphs is a distinctive topic of the Košice Graph Theory school, initiated by prof. Jendrol, and it is still highly popular in the group.

I can remember at least three problems that were presented at the KOKOS, which we managed to resolve and later publish in an article. The first was the problem on homogeneous coloring of graphs, presented by Maria Šurimová as a part of her doctoral research, we published a paper with her, her advisor Tomáš Madaras, and Roman. The second problem was also presented by her, a related topic on adynamic coloring of graphs (we published an article with her and Tomáš), which was also an inspiration for a third paper with Mária Maceková, Roman, and a colleague from France, Francois Dross on extensions of the Grötzsch theorem. Finally, the third problem, was presented by Julius Czap, and it motivated us to prepare a paper on a 3-coloring of a specific class of 4-regular planar graphs.

However, the above-described problems are just the tip of an iceberg of problems that arose after informal discussions, after and also during the seminars, the conversations on the halls or other occasions. All this resulted in many ideas, research work, and finally published papers. As I already wrote, I was lucky enough to work on various problems with almost every member of the Košice group, and a large part of these collaborations were inspired in some way by KOKOS and Cycles and Colourings.



kom seminára. Obzvlášť sa mi páčili, pretože témy zvyčajne veľmi súviseli s prácou, ktorú som vykonával v rámci svojho výskumu. Väčšinou sa prezentovali témy z farbenia grafov alebo z vlastností planárnych grafov. Štúdium planárnych grafov je charakteristickou témou košickej školy teórie grafov, ktorú inicioval prof. Stanislav Jendroľ a v skupine je stále veľmi populárna.

Spomínam si minimálne na tri problémy, ktoré boli prezentované na KOKOS-e, a ktoré sa nám podarilo vyriešiť a neskôr uverejniť v článku. Prvým bol problém o homogénnom grafom zafarbení, ktorý prezentovala Mária Šurimová v rámci svojho doktorandského výskumu, článok sme publikovali spolu s ňou, jej školiteľom Tomášom Madarasom a Romanom Sotákom. Druhý problém prezentovala tiež ona, išlo o príbuznú tému o adynamickom farbení grafov (článok sme publikovali s ňou a Tomášom), ktorá bola zároveň inšpiráciou pre tretí článok s Máriou Macekovou, Romanom a kolegom z Francúzska Francoisom Drossom o rozšírení Grötzschovej vety. Napokon tretí problém, ktorý predložil Július Czap, nás motivoval k príprave článku o 3-zafarbenosti špecifickej triedy 4-pravidelných planárnych grafov.

Vyššie opísané problémy sú však len špičkou ľadovca problémov, ktoré vznikli po neformálnych diskusiách, po a tiež počas seminárov, rozhovorov na chodbách alebo pri iných príležitostiach. To všetko vyústilo do mnohých nápadov, výskumných prác a napokon aj publikovaných článkov. Ako som už napísal, mal som to šťastie pracovať na rôznych problémoch takmer s každým členom košickej skupiny a veľká časť týchto spoluprác bola nejakým spôsobom inšpirovaná seminárom KOKOS a workshopom Cycles and Colourings.

Niečo o autorovi:

Doc. Dr. Borut Lužar pôsobí na Fakulte informačných štúdií v Novom Meste v Slovinsku. Počas doktorandského štúdia bol zamestnaný ako mladý výskumník v priemysle v spoločnosti Ambient d.o.o., kde bol aj čiastočne zamestnaný do roku 2015. Doktorandskú prácu s názvom Edge-Colorings and Partitions obhájil v roku 2013 pod vedením Risteho Škrekovského. Medzinárodne je dobre známy svojimi výsledkami o hranových zafarbeniach grafov a prácami o chovaní sa komplexných sietí. Je autorom/spoluautorom 47 pôvodných vedeckých prác, na ktoré má viac ako 300 citácií (podľa zbMATH). Dlhodobo intenzívne spolupracuje s košickými kolegami.

Adresa autora:

Faculty of Information Studies, Ljubljanska cesta 31A, Novo mesto, Slovenia  
e-mail: [borut.luzar@gmail.com](mailto:borut.luzar@gmail.com)

## 3.7 Moje podnetné vyše 10 ročné pôsobenie v KŠDM

*Mária Maceková*

Na UPJŠ som nastúpila na odbor Matematika, magisterské štúdium som následne ukončila v odbore Manažérska matematika. Bakalársku aj magisterskú prácu som písala pod vedením prof. S. Jendroľa, ktorý nám už počas prednášok z diskkrétnej matematiky (neskôr aj na predmetoch Teória grafov, Kombinatorická optimalizácia a Polyedrálna teória grafov) približoval krásy vedeckého skúmania. Aj tieto prednášky a hodiny strávené na konzultáciách ma inšpirovali k tomu, že som ďalej pokračovala v doktorandskom štúdiu a po získaní PhD. titulu som zostala na univerzite pracovať ako odborný asistent. Momentálne pracujem ako Java programátor v nadnárodnom korporáte.

O seminári KOKOS a konferencii C&C som mala nejaké kusé informácie už pred nástupom na doktorandské štúdium, „naplno“ som si ale semináre a konferencie užila až počas neho. Seminár ma pripravil nielen na to, ako prezentovať výsledky vlastnej práce, ale častokrát priniesol aj inšpirácie do vlastnej vedeckej činnosti. Počas štúdia a môjho pôsobenia na univerzite som (podľa svojich zápiskov) predniesla 17 príspevkov - čo rozhodne nie je málo. Dva roky som tiež bola, ako sme to interne nazývali, vedúcou KOKOSu :) Obnášalo to celkovú organizáciu seminára - zabezpečenie prednášajúceho buď z našej košickej skupiny, alebo prednášajúceho pozvaného „z vonku“ (či už z Bratislavy alebo zo zahraničných univerzít), prípravu miestnosti, techniky, prípadne malého občerstvenia.

Popri KOKOSE ma kolegovia postupne zapájali aj do prípravy konferencie C&C, kde som zo začiatku pomáhala s umiestňovaním smeroviek, vydávaním konferenčných materiálov, prípravou programu, vymýšľaním trás na konferenčný výlet. Postupne ma kolegovia pribrali do organizačného tímu, kde už bolo zodpovednosti viac. Naučilo ma to, ale komuni-

kovať s ľuďmi zo zahraničia, a takisto veľa vedeckých spoluprác a kamarátstiev, ktoré trvajú dodnes. Aj moja prvá spolupráca s niekým zo zahraničia vznikla tak, že sme sa trochu viac zaozprávali s pozvaným prednášajúcim z Francúzska (M. Montassier z univerzity v Montpellier), ktorý ma následne po mojom príspevku oslovil s nápadom, ako by sa dali moje výsledky ďalej posunúť, a v priebehu roka sme spísali novo získané výsledky do dvoch článkov.



Členovia Košickej školy diskretnej matematiky, Košice, 2018. (Foto: Mária Maceková.)

V rámci košickej skupiny diskretnej matematiky som si našla pár veľmi dobrých priateľov, s ktorými sme v kontakte aj mimo matematiky. Na tomto mieste mi nedá nespomenúť aj najlepšiu kamarátku, ktorú som vďaka tomu spoznala, ale už nanešťastie nie je medzi nami – Martinu Mockovčiakovú. Bola mojou „konferenčnou“ spolubývajúcou, zúčastnili sme sa spolu viacerých domácich aj zahraničných konferencií a prežili toho veľa aj v osobnom živote (či už viac, ale aj menej veselého). Spoznala som množstvo skvelých ľudí, dostala som sa vďaka tomu na miesta, o ktorých som ako študentka ani nenasnívala, podarilo sa mi dostať na polročné postdoktorandské

štúdium do francúzskeho Grenobla, kde som nabrala veľké množstvo skúseností a inšpirácie do ďalšej vedeckej práce.

Ak by som mala zhrnúť moje vyše 10 ročné pôsobenie v Košickej škole diskkrétnej matematiky, tak by som to označila ako veľmi podnetné obdobie, ktoré ma naučilo spolupráci, samostatnosti, zlepšilo moje organizačné a koordinačné zručnosti, privialo mi do života množstvo podnetných ľudí a vytvorilo silné kamarátstva. Taktiež mi to prinieslo možnosti vycestovať a prezentovať moje výsledky na rôznych seminároch a konferenciách, nadväzovať vedecké spolupráce a získavať podnety na výskum. Taktiež som mala možnosť odovzdávať svoje vedomosti a skúsenosti študentom, z ktorých niektorí pokračovali vo svojom vedeckom úsilí úspešne aj na doktorskom stupni štúdia. Týmto by som chcela popriať našej košickej škole ešte veľa šikovných mladých ľudí, ktorí nám budú robiť radosť svojou chuťou do práce a svojimi výsledkami upevnia dobré meno našej skupiny nielen na Slovensku, ale aj vo svete.

Niečo o autorke:

Informácie o autorke nájdete v kapitole 2. Významné osobnosti Košickej školy diskkrétnej matematiky na strane 80.

Adresa autora:

Ústav matematiky, Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Jesenná 5, 040 01 Košice  
e-mail: maria.macekova@upjs.sk

### 3.8 Many warm memories on mutual contacts with members of the Košice School of Discrete Mathematics

*Joe Ryan*

I write on behalf of myself and my life partner Mirka Miller who sadly passed away in 2016. Mirka was Professor of Computer Science and later Emeritus Professor of Mathematics at University of Newcastle. Her research interests included Data Security, Moore Bound of both graphs and digraphs, Graph Labeling, and sundry other fields in Graph Theory and Combinatorics. She was Principal Supervisor of more than 20 PhD students in the first three of these disciplines. In her time Mirka published over 200 articles in academic journals and refereed conferences and published 2 books. Articles were still being published under her name 6 years after her death as co-authors sought to complete work that she had initiated. Mirka is widely regarded as a world expert in the Moore Bound Problem. In addition she is renowned as the "Mother" of International Workshop on Optimal Network Topologies (IWONT), International Workshop of Graph Labelings (IWOGL) and GraphMasters, all of which are still active today.

My own output is more modest though to date I have published over 100 articles and 1 book and Principal Supervisor of 6 PhD students (and Co-Supervisor of another 6). My work is mainly in Graph Labeling, Connectivity and Distances in Graphs.

Together Mirka and I have held tenured positions at University of New England, Armidale; University of Newcastle; and University of Ballarat. Mirka has also held associated po-

### 3.8 Veľa príjemných spomienok na kontakty s členmi KŠDM

*Joe Ryan*

Píšem v mene svojom a svojej životnej partnerky Mirky Millerovej, ktorá bohužiaľ zomrela v roku 2016. Mirka bola profesorkou informatiky a neskôr emeritnou profesorkou matematiky na univerzite v Newcastli. Medzi jej výskumné záujmy patrili bezpečnosť dát, Mooreova hranica grafov aj digrafof, ohodnocovanie grafov a rôzne iné oblasti teórie grafov a kombinatoriky. Bola hlavnou školiteľkou viac ako 20 doktorandov v prvých troch z týchto disciplín. Mirka svojho času publikovala viac ako 200 článkov vo vedeckých časopisoch a v recenzovaných zborníkoch z konferencií a vydala 2 knihy. Články sa pod jej menom publikovali ešte 6 rokov po jej smrti, keďže spoluautori sa snažili dokončiť prácu, ktorú iniciovala. Mirka je všeobecne považovaná za svetovú odborníčku na Moorov problém. Okrem toho je známa ako „Matka“ Medzinárodného workshopu o optimálnych sieťových topológiách (IWONT), Medzinárodného workshopu o ohodnocovaní grafov (IWOGL) a GraphMasters, ktoré sú dodnes aktívne.

Moje vlastné výsledky sú skromnejšie, hoci som doteraz publikoval viac ako 100 článkov a 1 knihu a som hlavným školiteľom 6 doktorandov (a spoluškoliteľom ďalších 6). Moja práca sa týka najmä ohodnocovania grafov, súvislosti a vzdialeností v grafoch.

Spolu s Mirkou sme zastávali funkcie riadnych profesorov na University of New England v Armidale, University of Newcastle a University of Ballarat. Mirka mala čiastočné úväzky na Západočeskej univerzite v Plzni, ITB v Bandungu a Kings College v Londýne.

Na spoločné návštevy, semináre, konferencie a spoluprácu máme veľa pekných spomienok. Nie som si istý, kedy sa

sitions at University of West Bohemia, Pilsen; ITB, Bandung; and Kings College, London.

We have many fond memories of visits, workshops, conferences and collaborations together. I am not sure when Mirka first met Professors Jendroľ and Bača but it must have been in the 1990s. I first met them when they both visited us at University of Newcastle in 2001. I recall it being a very enjoyable and fruitful visit and the start of a long friendship. Both visiting professors gave seminars to research students in Department of Mathematics and Department of Computer Science and worked collaboratively with PhD students under Mirka's supervision. During this visit Prof. Jendroľ introduced us to a problem he had just formulated "*Total Irregular Labelings*". Our joint work produced a paper of the same name authored by Bača, Jendroľ, Miller and Ryan, which has since spawned a family of publications as interest in the topic spread. Google Scholar currently credits this article with 434 citations.

The visit to Australia was immediately followed by a visit to Indonesia for invitations to AWOCA (later IWOCA) 2001 hosted by ITB, Bandung. While in Bandung we all presented to and worked with students in Mathematics.



M. Miller and J. Ryan on C&C 2001. (Foto: Geňa Hahn.)



Mirka prvýkrát stretla s profesormi Jendroľom a Bačom, ale muselo to byť v 90-tých rokoch minulého storočia. Ja som sa s nimi prvýkrát stretol, keď nás obaja navštívili na univerzite v Newcastli v roku 2001. Spomínam si, že to bola veľmi príjemná a plodná návšteva a začiatok dlhoročného priateľstva. Obaja hosťujúci profesori viedli semináre pre študentov výskumu na Katedre matematiky a Katedre informatiky a spolupracovali s doktorandmi pod Mirkiným vedením. Prof. Jendroľ nás počas tejto návštevy oboznámil s problémom, ktorý práve sformuloval „*Total Irregular Labelings*“. Výsledkom našej spoločnej práce bol rovnomenný článok, ktorého autormi boli Bača, Jendroľ, Miller a Ryan, a ktorý odvtedy, ako sa záujem o túto tému šíril, dal vzniknúť celej kolekcii publikácií. Google Scholar v súčasnosti pripisuje tomuto článku 434 citácií.

Po návšteve Austrálie bezprostredne nasledovala návšteva Indonézie, kde sa uskutočnila pozvánka na AWOCA (neskôr IWOCA) 2001, ktorú hostila ITB v Bandungu. Počas pobytu v Bandungu sme všetci prednášali a pracovali so študentmi matematiky.



R. Simanjuntak, S. Jendroľ, J. Ryan, M. Miller, Y. Lin a M. Bača počas ich prvej návštevy, Košice, 2001. (Foto: Martin Bača.)

Later in the year Mirka and I travelled to Europe and enjoyed a reciprocal visit in Košice with 2 of Mirka's then PhD students, Rinovia Simanjuntak and Yuqing Lin. Once again the visit was both cordial and fruitful. We continued to work on the Total Irregular Labeling paper as well as other research leading to more articles published. The students were hosted for an extended stay in Košice before heading back to Newcastle. It was during this visit that Rino, Yuqing and I attended our first Cycles and Colourings workshop at Stara Lesna (I feel that Mirka may have attended earlier gatherings).



Trip within the conference C&C, Slovenský raj, 2001. (Bottom row from the left: S. Simić (Monte Negro), M. Bača, S. Jendroľ, Z. Tuza (Hungary); middle row: R. Simanjuntak (Indonesia), top row from the left: P. Mihók, F. Bullock (South Africa), J. Ryan (Australia), P. Owens (United Kingdom), L. Nebeský (Czech Republic), M. Miller (Australia), E. Flandrin (France), I. Broere, (South Africa).) (Foto: Joe Ryan.)

One memory of that first Cycles and Colourings Workshop was the day I was due to present. The session was chaired by Arnfried Kemnitz, Mirka spoke first in the session and I was to follow. During Mirka's presentation the TV from

Koncom roka sme s Mirkou cestovali do Európy a v Košiciach sme sa stretli na recipročnej návšteve s dvoma Mirkinými vtedajšími doktorandmi Rinoviou Simanjuntak a Yuqing Linom. Návšteva bola opäť srdečná a plodná. Pokračovali sme v práci na článku *Total Irregular Labeling*, ako aj na ďalších výskumoch, ktoré viedli k publikovaniu ďalších článkov. Študentov sme pred návratom do Newcastlu pripravili na predĺžený pobyt v Košiciach. Práve počas tejto návštevy sme sa Rino, Yuqing a ja zúčastnili na našom prvom workshope *Cycles and Colourings* v Starej Lesnej (mám pocit, že Mirka sa možno zúčastnila aj na skorších stretnutiach).



Na workshope *Cycles and Colourings*, Stará Lesná, 2001. (Foto: Stanislav Jendroľ.)

Jednou zo spomienok na tento prvý workshop *Cycles and Colourings* bol deň, keď som mal prednášať. Zasadnutie viedol Arnfried Kemnitz, Mirka hovorila ako prvá a ja som mal nasledovať. Počas Mirkinej prezentácie bol televízor z hotelovej recepcie veľmi hlasný a Stano išiel požiadať, aby ho stíšili. Vrátil sa s roztraseným pohľadom a navrhol, aby sme prišli k televízoru. Bolo to 11. septembra - teraz známy ako 11. sep-

Hotel reception was very loud and Stano went to ask for it to be lowered. He returned looking shaken and suggested we come to the TV. It was 11th September – known now as 9/11 and we were all shocked by the news and network coverage. Several people left the area to try to contact friends or relatives who were in New York at that time. After maybe an hour and realising that we were just seeing the same news repeated, it was decided to resume the workshop. I was the next speaker and it was an uncomfortable presentation I gave. There was not the atmosphere for jokes or even light hearted comments.

The following year we again attended Cycles and Colourings. Our talks were again scheduled on Tuesday afternoon with Arnfried as chair and Mirka to speak just before me. Fortunately no such disaster interrupted our session this time.

Since those early days I have attended more Cycles and Colourings Workshops including the gathering in 2018 to celebrate the 70th birthday of Professor Stano. Both Mirka and I have also met with members of the School at various other meetings in Europe and Australia including Czech-Slovak Graph Theory (CSGT) and the one-off CXL Graphs in honour of the 70th birthdays of Professors Stano and Zdeněk Ryjáček (from ZCU, Pilsen).

Professors Stano and Martin also visited us when Mirka and I accepted positions at University of Ballarat (now Federation University). During these visits they presented to and collaborated with PhD and Research Masters students as well as attending and presenting at some of the conferences mothered by Mirka.

Thank you to Košice School of Discrete Mathematics for the opportunity to meet wonderful people, for the theorems and articles, for the workshops and conferences, for the visits but mainly for the memories.

tember a všetci sme boli šokovaní správami a spravodajstvom televízie. Niekoľko ľudí opustilo túto miestnosť, aby sa pokúsili kontaktovať priateľov alebo príbuzných, ktorí boli v tom čase v New Yorku. Možno po hodine, keď sme si uvedomili, že vidíme len opakovanie tých istých správ, bolo rozhodnuté pokračovať vo workshope. Ďalším rečníkom som bol ja a bola to nepríjemná prezentácia, ktorú som predniesol. Nebola tu atmosféra na vtipy alebo dokonca odľahčené poznámky.

Nasledujúci rok sme sa opäť zúčastnili na workshope Cycles and Colourings. Naše prednášky boli opäť naplánované na utorok popoludní, pričom Arnfried bol predsedom a Mirka mala hovoriť tesne predou mnou. Našťastie tentoraz naše rokovanie neprerušila žiadna takáto katastrofa.

Odvtedy som sa zúčastnil na viacerých workshopoch Cycles and Colourings vrátane stretnutia v roku 2018 pri príležitosti 70. narodenín profesora Stana. Mirka aj ja sme sa s členmi školy stretli aj na rôznych iných stretnutiach v Európe a Austrálii vrátane *Česko-Slovenskej teórie grafov* (CSGT) a jednorazového stretnutia *CXL Graphs* na počesť 70. narodenín profesorov Stana a Zdenka Ryjáčka (zo ZČU v Plzni).

Profesori Stano a Martin nás navštívili aj vtedy, keď sme s Mirkou prijali profesorské miesta na University of Ballarat (teraz Federation University). Počas týchto návštev prezentovali a spolupracovali so študentmi doktorandského a magisterského štúdia, ako aj navštevovali a prezentovali na niektorých konferenciách, ktorých „matkou“ bola Mirka.

Ďakujem Košickej škole diskkrétnej matematiky za možnosť stretnúť úžasných ľudí, za teórie a články, za workshopy a konferencie, za návštevy, ale hlavne za spomienky.

Niečo o autorovi:

Prof. Dr. Joe Ryan je popredný austrálsky diskretný matematik. Pracoval ako vysokoškolský učiteľ na University of New England, Armidale, na University of Newcastle, Newcastle, a na University of Ballarat v Ballarat. Je autorom viac ako 100 pôvodných vedeckých prác z teórie grafov; väčšinou z grafových ohodnotení, súvislosti a vzdialenosti v grafoch. Jeho Hirshov  $h$ -index je 17.

Adresa autora:

School of Information and Physical Sciences, The University of Newcastle,  
University Drive, Callaghan, NSW 2308, Australia  
e-mail: [joe.ryan@newcastle.edu.au](mailto:joe.ryan@newcastle.edu.au)

## 3.9 Vzpomínky na počátky spolupráce

*Zdeněk Ryjáček*

Moje cesta k teorii grafů nebyla úplně přímočará – absolvoval jsem na MFF UK v Praze v oboru Matematická analýza, moje první zaměstnání bylo v Plzni na elektrotechnické fakultě tehdejší VŠSE, kde jsem se na katedře teoretické elektrotechniky zabýval teorií elektrických obvodů. A protože teorie obvodů je (ve své lineární podobě) vlastně komplexní analýza maticově na grafech, tak jsem se touto cestou dostal od analýzy až ke grafům.



Prof. Zdeněk Ryjáček, počas prednášky na workshope C&C, 2018.  
(Foto: Zdeněk Ryjáček.)

Do bližšího kontaktu s košickými grafaři jsem se dostal prostřednictvím pěkného problémku, který prezentoval Stan Jendroľ v problémové sekci na CSGT 1980 v Pardubicích – jednalo se o rovinné grafy s konstantním rozdílem stupňů uzlů na hranách a otázku, pro které dvojice hodnot stupňů takové grafy existují. Podařilo se mi najít vhodnou konstrukci, která věc řeší, byl z toho společný článeček (můj první v teorii grafů, po několika předchozích publikacích v teorii obvodů), a odstartovalo se tím dlouhodobé přátelství (kterého si velmi vážím). Přirozeným důsledkem byla moje účast na workshopu C&C 1993 v Novém Smokovci (na chatě Vodár). Tam mě velice oslovila skvělá kombinace pracovní atmosféry, přátelského prostředí a jedinečného okolí, takže jsem se stal pravidelným účastníkem workshopů C&C (přes Starou Lesnou, Tatranskou Štrbu až po posledních deset v Novém Smokovci). Popracovali jsme, z podnětných diskusí vzniklo několik nových myšlenek, které vedly k publikaci, ale také jsme podnikli řadu krásných „výšlapů“. Skvělá inspirující atmosféra ve velmi přátelském prostředí a krásném okolí, to jsou workshopy C&C.

Do kontaktu s Košickým kombinatorickým seminářem jsem se tak dostal až zprostředkovaně, nebyl jsem přímým účastníkem (což vzhledem ke geografické vzdálenosti ani nejde), účastnil jsem se ho spíše příležitostně při svých návštěvách Košic z jiných důvodů (obhajoby a podobně). Kromě matematických otázek jsem při cestách do Košic jeden čas řešil i problémy čistě praktické: po rozdělení společného státu nebylo možné v Plzni sehnat bryndzu, tak jsem si vždy z cest do Košic vozil zásobu...

Když je řeč o košickém semináři, tak vždy v pozadí vidím, že se jedná o velké dílo zakladatele prof. Jucoviče (kterého ještě pamatuji z československých grafových konferencí), v němž zdárně pokračovali jeho následovníci. Vzniklo tím svébytné pracoviště, které si na základech, položených prof. Jucovičem (jenž byl geometr) vybudovalo své specifické odborné zaměření, takže často při pohledu zvenčí lze hovořit o „*košické problematice*“, a je myslím namístě zde hovořit



o košické kombinatorické škole (zkratka KOKOŠ). Vzájemné vztahy mezi Košicemi a Plzní jsou však obousměrné – když jsme měli v Plzni projekt na postdoc pobytu, na jednom z nich byla skvělá košická kolegyně Martina Mockovčiaková, jíž tímto věnuji tichou vzpomínku, a velmi mě těší, že můj mladší kolega Přemek Holub našel společnou řeč se svými košickými vrstevníky a společně založili tradici každoročních workshopů o barvení grafů (střídavě v Košicích a v Plzni). Jsem již v důchodovém věku, ale věřím, že dobré vztahy mezi košickými a plzeňskými grafaři budou pokračovat i nadále.

Niečo o autorovi:

Prof. RNDr. Zdeněk Ryjáček, DrSc. je svetoznámy český matematik, známy najmä svojimi hlbokými výsledkami dosiahnutými pri štúdiu hamiltonovských vlastností grafov bez indukovaných podgrafov  $K_{1,3}$  (Hamiltonian properties of claw-free graphs). Je autorom/spoluautorom viac ako 100 pôvodných vedeckých prác uverejnených v renomovaných vedeckých časopisoch, na ktoré má viac ako 1000 citácií. Je zakladateľom Plzeňskej školy teórie grafov. Okrem toho je považovaný za otca informačného systému na riadenie vysokoškolského štúdia IS/STAG, ktorý sa úspešne implementoval na viacerých českých vysokých školách.

Adresa autora:

Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni,  
Technická 2967/8, 301 00 Plzeň  
e-mail: ryjacek@kma.zcu.cz

### 3.10 Krátka osobná reflexia Košického kombinatorického seminára

*Gabriel Semanišin*

Môj prvý kontakt s Košickým kombinatorickým seminárom sa datuje na začiatok deväťdesiatych rokov minulého storočia, keď som sa pod vedením doc. RNDr. Petra Mihóka, CSc. začal venovať teórii grafov. Spoločne sme sa venovali rôznym problémom týkajúcich sa štruktúry zväzu dedičných vlastností. Keď sa nám podarilo získať zaujímavé výsledky o grafových postupnostiach maximálnych  $k$ -degenerovaných grafov, tak som bol prvýkrát, ešte ako študent, pozvaný na stretnutie KOKOSu, kde Peter Mihók naše výsledky prezentoval. Pravidelne som začal KOKOS navštevovať až počas doktorandského štúdia. Ešte predtým som sa mal dvakrát možnosť zúčastniť Česko-slovenskej konferencie z teórie grafov v rokoch 1991 a 1992. Vďaka nim som spoznal viacerých slovenských aj zahraničných grafárov, ktorých som potom stretával pri rôznych príležitostiach a viacerí z nich zavítali aj na KOKOS.

KOKOS som vnímal ako analógiu pražských matematických seminárov, o ktorých sme veľa počúvali od českých kolegov. Bolo to miesto, kde sa stretávala veľká skupina košických matematikov a študentov, ktorých spájala spoločný záujem – teória grafov. Naša výskumná skupina – Peter Mihók, Roman Vasky, Jozef Bucko a ja – sa venovala dedičným vlastnostiam grafov. Spolupracovali sme najmä s kolegami zo Zielonej Góry – Mietkom Borowieckim a jeho doktorandmi a z Pretórie a Johannesburgu – Izakom Broerom a Marietjie Frick. Aj oni veľakrát zavítali do Košíc a na KOKOS. Izak Broere nazval našu veľkú skupinu Hereditarnia, a tak sme sa zvykli nazývať aj v Košiciach. Na podnet Mietka Borowieckeho vznikol aj rovnomenný workshop. Workshop Hereditarnia vznikol pár rokov po workshope Cycles and Colourings, ktorý bol priamo previazaný so seminárom KOKOS – hlavnými organizátormi, ale aj tematicky. Zatiaľčo prvý workshop bol viac

pracovne orientovaný, užšie zameraný a stretávala sa tam pomerne stabilná a uzatvorená komunita, workshop Cycles and Colourings sa vyznačoval kvalitnými pozvanými prednášajúcimi, bohatým programom a neodmysliteľne k nemu patrili kolorit a atmosféra Tatier. Bola to možnosť stretnúť a spoznať veľmi zaujímavé osobnosti a aj nadviazať nové osobné a pracovné kontakty.



Na C&C Gabriel Semanišin a Peter Mihók, 1999. (Foto: Stanislav Jendroľ.)

Spomedzi mnohých KOKOSov mi najviac utkvel v pamäti jeden, keď Peter Mihók prezentoval najnovšie výsledky ohľadom rozkladu dedičných vlastností na ireducibilné faktory, ktoré získal spolu s Romanom Vaskym. Bolo to zlepšenie oproti nášmu predchádzajúcemu výsledku, ale stále ďaleko od všeobecného riešenia. Ja som si počas seminára uvedomil, že použitú myšlienku viem zovšeobecniť a zlepšiť výsledok o ďalšie rády. Hneď po seminári som to ukázal Petrovi Mihókovi. Bolo to v utorok popoludní a cez týždeň sme ešte sporadicky prehodili o novej konštrukcii zopár slov. V nedeľu dopoludnia mi potom zavolať Peter Mihók, že na základe tejto myšlienky vie urobiť všeobecnú konštrukciu, ktorá je kľúčom k dôkazu vety o jednoznačnom rozklade aditívnych

dedičných vlastností grafov na ireducibilné faktory. Bola to ešte éra bez mobilov. Mali sme obaja iba pevnú linku a tak sme si skoro dve hodiny postojacky telefonicky vysvetľovali všetky nuansy čerstvého dôkazu.



Účastníci workshopu HEREDITERNIA 2005, Herľany. (Zdroj: Stanislav Jendroľ.)

KOKOS bol inšpiráciou aj pre vznik ďalších výsledkov, napr. nášho príspevku s Romanom Sotákom k problematike online rankingu. Postupne začali seminár navštevovať aj moji doktorandi, ktorí sa venovali problémom z oblasti algoritmickej teórie grafov. Jeden z nich - Ján Katrenič – na jednom z KOKOSov nadviazal úspešnú spoluprácu s Ingom Schiermeyerom a následne spolu publikovali viaceré pekné výsledky.

Osobne som presvedčený, že založenie Košického kombinatorického seminára bol významný krok, ktorý zásadným spôsobom ovplyvnil spoluprácu v oblasti teórie grafov. Takéto semináre patria na výskumné fakulty a je dobré, že KOKOS v rôznych podobách pretrval dlhé desaťročia. Význam vzájomnej spolupráce a výmeny informácií je dnes oveľa dôležitejší ako v minulosti, pretože nové poznatky pribúdajú enormným tempom a len v početnejšej skupine sa dá držať krok s okolitým svetom.



Účastníci workshopu HEREDITERNIA 2009, Vaal Dam, Juhoafrická republika (Z KŠDM boli prítomní M. Horňák, S. Jendroľ, P. Mihók, G. Semanišin, a J. Bucko.) (Zdroj: Stanislav Jendroľ.)

Niečo o autorovi:

Informácie o autorovi nájdete v kapitole 2. Významné osobnosti Košickej školy diskkrétnej matematiky na strane 66.

Adresa autora:

Ústav matematiky, Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Jesenná 5, 040 01 Košice  
e-mail: gabriel.semanisin@upjs.sk

### 3.11 Recollections from the C&C Workshop and the KOKOS seminar

*Ingo Schiermeyer*

O My name is Ingo Schiermeyer and I have been chair for Discrete Mathematics and Algebra at Technical University of Mining and Technology, Germany, from 1999 – 2023. Currently, I'm a visiting professor at AGH Cracow, Poland. I first met Stanislav Jendroľ at the "Erdős is Eighty"-conference in Keszthely at Lake Balaton in 1993. Here I heard about the "Workshop on Cycles and Colourings" to take place in Stara Lesna in High Tatras in september 1993. Starting in 1994 I have participated in 28 events of this very fruitful workshop.

*The C&C workshop*

The "Workshop on Cycles and Colourings" (C&C workshop) took place for the first time in 1992 in Čingov in Slovak Paradise. Since 1993 the workshop has been held in the High Tatras. Since then it took place every year and is known as an international workshop of high standard. It has attracted several hundred participants from more than 25 countries. Since cycles and colourings in graphs are among my main research topics, this workshop has been always very attractive for me. Traditionally, the graph theory hymn is sung by all participants multilingual (all at the same time). Then the "face colouring algorithm" introduced by Stano Jendroľ is applied meaning that all participants take a glas of Tokaj wine or red wine and cheer to each other. On wednesday, traditionally an excursion with several groups in the beautiful High Tatra mountains is organized.

## 3.11 Spomienky na workshop C&C a KOKOS

*Ingo Schiermeyer*

Volám sa Ingo Schiermeyer a v rokoch 1999 – 2023 som bol vedúcim Katedry diskkrétnej matematiky a algebry na Technical University of Mining and Technology v Nemecku. V súčasnosti som hosťujúcim profesorom na AGH v Krakove, Poľsko. So Stanislavom Jendroľom som sa prvýkrát stretol na konferencii „Erdős má osemdesiat“ v Keszthely pri Balatone v roku 1993. Tu som sa dozvedel o workshope Cycles and Colourings, ktorý sa mal konať v Starej Lesnej vo Vysokých Tatrách v septembri 1993. Od roku 1994 som sa zúčastnil na 28 podujatiach tohto veľmi plodného workshopu.

*Workshop C&C*

Workshop Cycles and Colourings (C&C workshop) sa prvýkrát uskutočnil v roku 1992 na Čingove v Slovenskom raji. Od roku 1993 sa workshop uskutočňuje vo Vysokých Tatrách. Odvtedy sa koná každoročne a je známy ako významný medzinárodný workshop. Prilákal niekoľko stoviek účastníkov z viac ako 25 krajín. Keďže cykly a farbenie v grafoch patria medzi moje hlavné výskumné témy, tento workshop bol pre mňa vždy veľmi atraktívny. Hymnu teórie grafov tradične spievajú všetci účastníci viacjazyčne (všetci naraz). Potom sa použije „*algoritmus farbenia tváří*“, ktorý zaviedol Stano Jendroľ, čo znamená, že všetci účastníci si dajú pohár tokajského alebo červeného vína a navzájom si pripíjajú na zdravie. V stredu sa už tradične organizuje výlet s niekoľkými skupinami do krásnych Vysokých Tatier.



C&C excursion in High Tatras 2023 - hiking group on Sedielko. (Foto: Ingo Schiermeyer.)

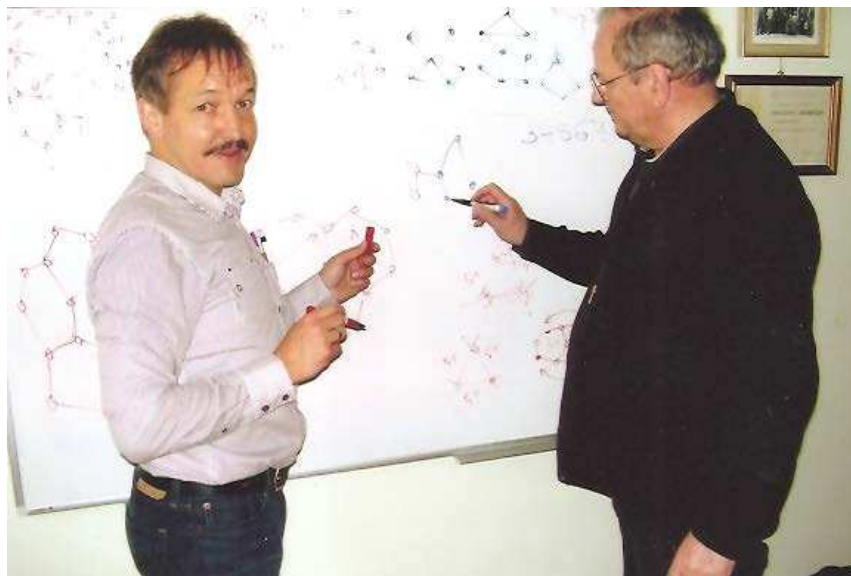
### *The KOKOS seminar*

The "Košice Combinatorics seminar" (called KOKOS) is an ongoing seminar at UPJŠ. During 2012 – 2014 I have been a member of the European Research project EXPERT at UPJŠ. During that time I visited UPJS eight times and delivered several talks in the KOKOS seminar. One of Stano's favourite research topics are weights of edges in graphs. Together we solved a problem posed by Paul Erdős and published it in *Combinatorica*. Later, together with Mirko Hornak, we succeeded to solve this problem also for bipartite and connected graphs.

### *Stano as a host*

Stano is known to me as a very friendly host. He has introduced the "famous face colouring algorithm". He liked to invi-





Pri spoločnom riešení problému, Košice, 2012. (Zľava: Ingo Schiermeyer, Stanislav Jendroľ.) (Foto: Stanislav Jendroľ.)

### *Seminár KOKOS*

Košický seminár z kombinatoriky (KOKOS) je priebežný seminár na UPJŠ. V rokoch 2012 – 2014 som bol členom európskeho výskumného projektu EXPERT na UPJŠ. Počas tohto obdobia som navštívil UPJŠ osemkrát a predniesol niekoľko prednášok na seminári KOKOS. Jednou zo Stanových obľúbených výskumných tém sú váhy hrán v grafoch. Spoločne sme vyriešili problém, ktorý položil Paul Erdős, a publikovali sme ho v časopise *Combinatorica*. Neskôr sa nám spolu s Mirkom Horňákom podarilo vyriešiť tento problém aj pre bipartitné a súvislé grafy.

### *Stano ako hosťiteľ*

Stano je pre mňa známy ako veľmi priateľský hosťiteľ. Zaviedol slávny „algoritmus farbenia tváre“. Svojich hostí rád pozýval do neďalekej reštaurácie „Lampáreň“ alebo do „Med

te his guests to the nearby Restaurant "Lampáreň" or to the "Med Malina", a polish Restaurant with typical goral atmosphere. As a dessert, he recommended the typical Szarlotka (apple pie) – very tasty.



Conference trip C&C, 2022. (Foto: Mária Maceková.)

Malina“, polskej reštaurácie s typickou goralskou atmosférou. Ako zákusok odporúčal typickú Šarlotku (jablkový koláč) – veľmi chutný.

Niečo o autorovi:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Ingo Schiermeyer je svetoznámy nemecký matematik. Dlhé roky pôsobil na viacerých nemeckých univerzitách ako vysokoškolský učiteľ. Najdlhšie pôsobil ako riaditeľ Oddelenia diskkrétnej matematiky a algebry na Technical University of Mining and Technology (v rokoch 1999 až 2023). Od októbra 2023 je na tej istej univerzite emeritným profesorom. Momentálne pracuje ako *visiting professor* na AGH University v Krakove (Poľsko). Má za sebou viaceré dlhodobé pobyty na rôznych zahraničných (mimo Nemecka) pracoviskách. V období február 2013 až január 2015 pôsobil ako medzinárodný expert na UPJŠ v Košiciach. Je autorom, resp. spoluautorom viac ako 230 vedeckých publikácií, ktoré boli citované viac ako 2 000-krát. Jeho Hirschov  $h$ -index je 27. Viac rokov pôsobí ako výkonný redaktor špičkového medzinárodného vedeckého časopisu *Graphs and Combinatorics*. Je tiež členom redakčných rád niekoľkých ďalších popredných medzinárodných vedeckých časopisov. Od r. 2013 je držiteľom Striebornej medaily Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach.

Adresa autora:

Institut für Diskrete Mathematik und Algebra, Technische Universität  
Bergakademie Freiberg, 09 596 Freiberg, Germany  
Visiting professor, AGH Cracow, Poland  
e-mail: Ingo.Schiermeyer@math.tu-freiberg.de

## 3.12 Niekoľko poznámok o spolupráci košických a bratislavských kombinatorikov

*Martin Škoviera*

Kombinatorika sa rozvíja na Slovensku už viac ako šesťdesiat rokov v dvoch nezávislých centrách – v Bratislave a v Košiciach. V oboch prípadoch môžeme hovoriť o samostatných vedeckých *školách*, keďže v oboch centrách sa dlhodobo dosahujú významné vedecké výsledky so širokým medzinárodným uznaním. Obe školy majú svojich otcov-zakladateľov – v Košiciach je ním profesor Ernest Jucovič a v Bratislave Anton Kotzig – majú svojich nasledovníkov, odchovancov a majú tiež svoj vlastný štýl, charakter a vedecké smerovanie. Ako odchovancovi Bratislavskej kombinatorickej školy mi neprislúcha úloha hodnotiť jej význam a vyzdvihnúť výsledky. Pokiaľ ide o Košickú kombinatorickú školu, tejto úlohy sa úspešne ujali iní, kvalifikovanejší ako ja a tiež odborne ku košickej problematike bližší. V tomto texte sa preto obmedzím len na niekoľko viac-menej náhodných spomienok na svoje stretnutia s Košickou kombinatorickou školou a jej predstaviteľmi.

Moje prvé stretnutie s košickou kombinatorikou, presnejšie s košickou teóriou grafov, bolo hneď na začiatku mojej vedeckej kariéry v roku 1980. Vtedy, ešte ako študent Univerzity Komenského v Bratislave, som sa zúčastnil Česko-Slovenskej konferencie z teórie grafov konanej v Pardubiciach a vystúpil som na nej s príspevkom o štruktúre náhodných podgrafov  $n$ -rozmernej kocky. Už v tom čase som sa však začal orientovať viac na topologickú a algebraickú teóriu grafov, ktorá v tom čase v Bratislave nemala nijaké zázemie. Jeden z mojich učiteľov, profesor Štefan Znam mi preto navrhol, že ma počas konferencie zoznámí s istým košičanom, ktorý má k tejto problematike blízko. Bol to Stano Jendroľ (v tom čase odborný asistent), s ktorým ma dodnes viaže blízke priateľstvo. Pochválil som sa, čo som čítal a akými problémami sa zaobe-

rám, čo plánujem ďalej robiť a podobne. Stano si ma vypočul a vážne povedal: „Je to ťažká problematika a bude vás stáť veľa námahy“. Jeho slová som zobral vážne a náš rozhovor sa mi na dlhú dobu vryl do pamäti.



Počas prednášky. (Zdroj: Martin Škoviera.)

Druhé stretnutie, ktoré by som chcel pripomenúť, bolo nepriame a odohralo sa na jeseň roku 1992 na Bratislavskom seminári z teórie grafov, ktorý v tom čase viedol profesor Znam. Na jednej z prvých prednášok v zimnom semestri 1992/93 vystúpil Martin Knor a podal správu o novej medzinárodnej konferencii s názvom Cycles and Colourings, organizovanej košickou kombinatorickou skupinou v Slovenskom raji. Zúčastnil sa jej ako jediný z nášho seminára a podrobne poinformoval o jej priebehu, prednáškach, ale aj o jej spoločenskej a turistickej stránke. Hneď mi bolo jasné, že ide o významnú vedeckú udalosť, takže som ľutoval, že som sa jej nezúčastnil. Málokto vtedy tušil – ani ja – že táto konferencia sa stane základom pravidelnej série konferencií rovnakého názvu, a že si postupne získa významné postavenie medzi konferenciami z oblasti teórie grafov na celom svete a skvelé medzinárodné renomé. Neskôr som sa zúčastnil mnohých inštalácií tej-

to konferenčnej série, vždy k svojej maximálnej spokojnosti, a plánujem sa jej zúčastňovať aj v budúcnosti. Táto konferencia je podľa môjho názoru jedným z najvýraznejších produktov Košickej kombinatorickej školy a zároveň priamym dôkazom jej významného medzinárodného postavenia.

Nebudem asi ďaleko od pravdy, keď poviem, že prvá konferencia zo série *Cycles and Colourings* sa mohla stať inšpiráciou pre môjho priateľa a mnohonásobného spoluautora Romana Nedelu a pre mňa, keď sme sme sa v roku 1993 rozhodli, že v nasledujúcom roku zorganizujeme medzinárodnú konferenciu *Graph Embeddings and Maps on Surfaces* (GEMS). Naším cieľom bolo vytvoriť fórum pre komunikáciu výskumníkov zaoberajúcich sa rôznymi aspektmi teórie vnorení grafov do plôch a máp na plochách. S istou obavou a pocitom neistoty sme oslovili významných odborníkov z celého sveta pracujúcich v tejto oblasti. Ich veľký záujem bol pre nás príjemným prekvapením a uspokojením. Konferencie sa napokon zúčastnili odborníci zo štyroch kontinentov sveta a v jej priebehu sa všetci vyslovili za jej pokračovanie v budúcnosti. Od roku 1997 sa konferencia GEMS konala každé štyri roky (s výnimkou koronového roka 2021) a uskutoční sa aj v roku 2025. V tejto súvislosti je dôležité spomenúť, že na organizovaní inštalácie konferencie GEMS v roku 2005 sa významne podieľala Košická kombinatorická škola pod vedením Stana Jendroľa.

Moje nasledujúce dve spomienky sa viažu na konkrétnu vedeckú spoluprácu s košickými kolegami. Ako prvú chcem uviesť prácu týkajúcu sa problému Branka Grömbaum o existencii regulárnych máp ľubovoľného hyperbolického typu  $\{p, q\}$ . Týmto problémom sme sa s Romanom Nedelom začali seriózne zaoberať krátko po konferencii GEMS 1994, pričom naším cieľom bolo nájsť krátky kombinatorický dôkaz existencie takýchto máp. Vo väčšine prípadov sme rýchlo našli vhodný kvocient požadovanej mapy, chýbal nám však jeden kamienok do mozaiky, konkrétne pre mapy typu  $\{7, 3\}$  (takzvané *Hurwitzove mapy*). Ten kamienok nám na požiadanie poskytol Stano Jendroľ. Takto teda vznikol prvý ele-

mentárny dôkaz Grünbaumovho problému. Získané riešenie sme následne ešte zjednodušili a v roku 1997 trojica autorov Jendroľ, Nedela a Škoviera opublikovala v časopise *Mathematica Slovaca* článok s názvom *Constructing regular maps and graphs from planar quotients*. Žiada sa mi dodať, že tento výsledok má hlboké súvislosti s inými oblasťami matematiky, a že tento prístup sme s Romanom Nedelom neskôr výrazne zovšeobecnil. Tým sme čisto kombinatorickými metódami dokázali hlboký výsledok slávneho ruského matematika Maľceva o reziduálnej konečnosti trojuholníkových grúp.



Martin Škoviera s Romanom Nedelom. (Zdroj: Martin Škoviera.)

Druhá práca, ktorú chcem spomenúť, je pomerne nedávna a dokumentuje spoluprácu bratislavskej skupiny s mladšou generáciou košických matematikov. Ide o článok *Strong edge colorings of graphs and the covers of Kneser graphs* publikovaný vo významnom vedeckom časopise *Journal of Graph Theory* vydavateľstva *Wiley* v roku 2022. Jeho autormi sú Borut Lužar, Edita Máčajová, Roman Soták a ja. Roman Soták je dnes jedným z najvýznamnejších predstaviteľov Košickej kombinatorickej školy. Do tejto spoločnosti môžeme bez väčšieho zaváhania zaradiť aj nášho slovinského priateľa Boruta Lužara,

ktorý s košickou skupinou dlhodobo intenzívne spolupracuje. Zvyšní dvaja autori sú bratislavčania. Podnet na spoluprácu vznikol na jednej z konferencií série Cycles and Colourings a materializoval sa na jeseň roku 2019, keď sme sa všetci štyria stretli v Bratislave. V tomto článku sme prepojili niekoľko na prvý pohľad oddelených pojmov, akými sú silné hránové farbenia grafov, nakrytia a symetrie Kneserových grafov. Vďaka odhaleným súvislostiam sa nám podarilo vyvrátiť temer 30 rokov starú hypotézu Ralpha Faudreeho o silných farbeniach. Práca na tomto projekte bola pre mňa veľkým zážitkom aj tým, ako rôzne znalosti jednotlivých spoluautorov zapadli do seba a ako priniesli nečakaný výsledok. Verím, že aj zvyšní spoluautori to cítia podobne. Je pre nás obrovským zadostučinéním, že v júli 2024 *Journal of Graph Theory* zaradil náš článok medzi 10 najcitovanejších prác z rokov 2022 – 2023 publikovaných v tomto časopise.



Na workshope C&C, 2008. (Zľava okolo stola: prof. Z. Ryjáček, prof. A. Rosa, prof. J. Kratochvíl, prof. J. Nešetřil, prof. S. Jendroľ, prof. M. Borowiecki, doc. P. Mihók, prof. Zs. Tuza, prof. M. Škoviera.) (Zdroj: Martin Škoviera.)

Na záver chcem povedať, že spomenuté skutočnosti sú len malými príkladmi mnohohrstvovej spolupráce a vzájomného rešpektu dvoch kombinatorických skupín pracujúcich na Slo-



vensku. Ich výsledkom sú nielen konkrétne vedecké práce a konferencie, ale aj úspešné habilitačné a inauguračné konania, obhájené dizertačné práce a mnoho ďalších vecí hodných spomenutia. Výber uvedených príkladov je čisto osobný. Jeho zámerom je skôr ilustrácia než snaha o systematickú dokumentáciu. Zároveň je tento text aj vyjadrením vďaky mojim košickým priateľom za to, čo pre nás v Bratislave – a teda aj pre mňa osobne – urobili.

Niečo o autorovi:

Prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD. je svetoznámy slovenský matematik, informatik a vysokoškolský učiteľ. Venuje sa oblastiam diskkrétnej matematiky a teoretickej informatiky, predovšetkým teórii grafov. Pôsobí na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave. Preslávil sa ako autor či spoluautor viacerých zásadných poznatkov v niekoľkých oblastiach teórie grafov. Je autorom či spoluautorom viac ako 120 pôvodných vedeckých prác uverejnených v podstatnej väčšine vo vedeckých časopisoch absolútnej svetovej špičky (napr. *Discrete Math.*, *J. Graph Theory*, *J. Combinatorial Theory B*, a pod.), na ktoré databáza zbMATH udáva viac ako 1 160 citácií. V r. 2022 získal ocenenie „*Vedec roka Slovenskej republiky*“. Spolu s profesormi J. Širáňom a R. Nedelom patrí k zakladateľom medzinárodne známej Slovenskej školy topologickej teórie grafov. Inicioval sériu konferencií GEMS o vnorení grafov do plôch a ich symetrií, na ktorých sa od r. 1994 každé štyri roky stretávajú odborníci na algebraickú a topologickú teóriu grafov zo všetkých kontinentov sveta.

Adresa autora:

Katedra informatiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava  
e-mail: [Martin.Skoviera@fmph.uniba.sk](mailto:Martin.Skoviera@fmph.uniba.sk)

### 3.13 Workshop on Cycles and Colourings – Great Gift to the Research Community

*Zsolt Tuza*

Before 1992 I had no connection with the Košice School of Discrete Mathematics. Then I received a kind invitation from Professor Jendroľ, to take part in the first Workshop on Cycles and Colourings in Čingov, Slovak Paradise, which I gladly accepted. The subsequent annual conferences in this series were then held in the High Tatras. I can happily and proudly say that I never missed any of them.

Cycles and Colourings has become the yearly celebrated event dealing with those two areas of Graph Theory. There



Michael Stiebitz (Ilmenau) and Zsolt Tuza (Budapest) discussing mathematical problems in front of a church, 1992. (Foto: Margit Voigt.)

## 3.13 Workshop Cycles and Colourings – veľký darček pre výskumnú komunitu

*Zsolt Tuza*

Pred rokom 1992 som nemal žiaden kontakt s Košickou školou diskkrétnej matematiky. Potom som dostal milé pozvanie od profesora Jendroľa, aby som sa zúčastnil na prvom workshope Cycles and Colourings na Čingove v Slovenskom raji, ktoré som rád prijal. Ďalšie každoročné workshopy v rámci tejto série sa konali vo Vysokých Tatrách. S radosťou a hrdosťou môžem povedať, že som nevynechal ani jeden z nich.

Cycles and Colourings sa každoročne stali oslavným podujatím zaoberajúcim sa týmito dvoma oblasťami teórie grafov.



20. workshop C&C, 2011. (From left: prof. J. Harant (Ilmenau), prof. Zs. Tuza (Budapešť), prof. S. Jendroľ, prof. M. Horňák.) (Foto: Margit Voigt.)

was only one unfortunate year when we had no chance to gather, due to the covid pandemic in 2020; and in the year after, still a bit shadowed by its waves, the conference was organized in a hybrid way.

Each year we have the opportunity to enjoy plenary talks of very high quality, and to present our new results in 20-minute contributed talks. Further, there is time for discussions, initiating or continuing joint research. This is important for all of us, but even more so for PhD. students and young colleagues, who can join an open and acceptive international community of researchers in this way.

During the decades many innovative research directions were born and developed in the framework of C&C. The conference does not have regular proceedings; however, refereed Special Volumes were dedicated to the presented results by *Tatra Mountains Mathematical Publications* twice, and by the top-level journal *Discrete Mathematics* six times. All these were appreciated great services for us.

For myself I consider it a gift that in 1994 I had the great pleasure and honour to introduce C&C to Professor Erdős, the legendary Uncle Paul. At the times when he was in Budapest, we regularly worked together. While we tried to solve an open problem in graph theory, he put me the question: *What will you do next week?* I told him, I would attend a conference in the High Tatras. His next question was: *Can I join you?* We phoned the organizers, and they happily said yes.

I have written about the professional aspects of this conference. But there is something more beyond that, what makes C&C very special. It has an exceptional atmosphere where one can find real good friends.

Bol len jeden nešťastný rok, keď sme sa nemali možnosť stretnúť, a to kvôli pandémie kovidu v roku 2020. V nasledujúcom roku, ešte trochu poznačenom jej vlnami, bol workshop zorganizovaný hybridným spôsobom.

Každý rok sme mali možnosť vychutnať si plenárne prednášky veľmi vysokej kvality a prezentovať svoje nové výsledky v 20-minútových príspevkoch. Ďalej bol čas na diskusie, iniciovanie alebo pokračovanie spoločného výskumu. To bolo dôležité pre nás všetkých, ale ešte viac pre doktorandov a mladých kolegov, ktorí sa takto mohli pripojiť k otvorenej a vnímavnej medzinárodnej komunite výskumníkov.

V priebehu desaťročí sa v rámci C&C zrodilo a rozvinulo mnoho inovatívnych výskumných smerov. Konferencia nemá pravidelný zborník, avšak prezentovaným výsledkom boli dvakrát venované recenzované špeciálne zborníky v *Tatra Mountains Mathematical Publications* a šesťkrát v špičkovom časopise *Discrete Mathematics*. To všetko boli pre nás oceňované veľké služby.

Za seba považujem za veľký dar a česť, že som mohol v roku 1994 predstaviť na workshope C&C profesora Erdősa, legendárneho Strýka Pavla. V čase, keď bol v Budapešti, sme pravidelne spolupracovali. Keď sme sa snažili vyriešiť otvorený problém z teórie grafov, položil mi otázku: *Čo budeš robiť budúci týždeň?* Povedal som mu, že sa zúčastním na konferencii vo Vysokých Tatrách. Jeho ďalšia otázka znela: *Môžem sa k tebe pridať?* Zavolali sme organizátorom a oni s radosťou súhlasili.

O odborných aspektoch tejto konferencie som už písal. Ale je tu ešte niečo navyše, čo robí C&C veľmi výnimočnou. Má výnimočnú atmosféru, v ktorej človek nájde skutočných dobrých priateľov.



Three of the Workshop's C&C most frequent participants, 2011. (From left: prof. S. Jendroľ, prof. J. Harant and prof. Zs. Tuza.) (Foto: Margit Voigt.)

Niečo o autorovi:

Prof. Dr. Zsolt Tuza je svetoznámy maďarský matematik pracujúci na University of Pannonia, Veszprém a zároveň na MTA Rényi Institute, Budapest. Je matematikom patriacim do absolútnej svetovej špičky v odboroch diskkrétnej matematiky a teoretickej informatiky. Je autorom viac ako 425 pôvodných vedeckých prác (podľa zbMATH), na ktoré zaznamenal viac ako 4 100 citácií. Databáza Research Gate eviduje na jeho práce dokonca viac ako 6 000 citácií. Jeho Hirschov index je viac ako 42. Jeho prehľadový článok „*Graph coloring with local constraints – A survey*“ z roku 1997 bol doteraz citovaný viac ako 300-krát. Je členom redakčných rád niekoľkých popredných svetových vedeckých časopisov. Zúčastnil sa (ako jeden z dvoch účastníkov) na všetkých doterajších workshopoch Cycles & Colourings.

Adresa autora:

HUN-REN Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Budapest and University of Pannonia, Veszprém, Hungary  
e-mail: tuza.zsolt@mik.uni-pannon.hu

### 3.14 The influence of the Košice Graph Theory Group workshops on my scientific life

*Margit Voigt*

After studying mathematics and working for several years in applied mathematics at the Friedrich Schiller University Jena, I started working on graph theory at the Ilmenau University of Technology in 1990. I worked as a doctoral student in the graph theory group and completed my dissertation under the supervision of Hansjoachim Walther. During this time, I benefited greatly from the collegial atmosphere and the national and international research activities of the Ilmenau group and finished my habilitation in 1996. In 2004, I became a professor at the Dresden University of Applied Sciences and worked there until my retirement in 2021.



ILKE Workshop, Košice, 2019. (From the left: M. Voigt, J. Schreyer and I. Fabrici.)  
(Foto: Margit Voigt.)



### 3.14 Vplyv vedeckých podujatí košickej skupiny z teórie grafov na môj vedecký život

*Margit Voigt*

Po štúdiu matematiky a niekoľkoročnom pôsobení v oblasti aplikovanej matematiky na Univerzite Friedricha Schillera v Jene som sa v roku 1990 začala venovať teórii grafov na Technickej univerzite v Ilmenau. Pracovala som ako doktorand v oblasti teórie grafov a dizertačnú prácu som dokončila pod vedením Hansjoachima Walthera. Počas tohto obdobia som veľmi ťažila z kolegiálnej atmosféry a národných a medzinárodných výskumných aktivít skupiny v Ilmenau a v roku 1996 som habilitovala. V roku 2004 som sa stala profesorkou na fakulte Aplikovaných vied na Drážďanskej univerzite, kde som pôsobila až do dôchodku v roku 2021.



Nemecká skupina sa vracia domom z workshopu C&C (za organizátorov ich vyprevádzajú I. Fabrici a E. Škrabuľáková), Nový Smokovec, 2016. (Foto: Margit Voigt.)

Especially during my time in Ilmenau, the workshops on "Cycles and Colorings", organized every September by the Graph Theory Group of the Faculty of Science Pavol Jozef Šafárik University in Košice in cooperation with the Ilmenau University of Technology, played an important role in my scientific life. To date, I have participated in 21 of the 31 workshops and am already registered for the 32nd workshop. Twice I had the honor of giving one of the plenary lectures.

I think that in addition to the lectures with new ideas, solutions, problems and challenges, it is very important to meet colleagues from several countries in person. In my opinion, it is much easier to get in touch and work together when you know each other personally and discuss various things in a relaxed atmosphere.

A valuable collaboration has developed with 14 colleagues I met at these workshops. This collaboration resulted in 28 publications and also had a significant impact on my habilitation.

For example, I first talked to the already very well-known Hungarian mathematician Zsolt Tuza on a hike during the 1st Workshop on Cycles and Colorings in 1992. We started a collaboration and to date we have 19 common publications partially with further coauthors.

Incidentally, the mentioned hike went down in the history of the workshop. Before the start, the organizers talked about a short afternoon walk. We hiked along a river in the Slovak Paradise with some obstacles like steps and chains along the rocky banks. When the climb seemed to have no end, Peter Owens (an English colleague) said the legendary phrase: "I hope the river will be a cycle". Eventually, our hiking guide realized that we were lost and had little chance of being back at our accommodation by dinner time. A high-speed group of four colleagues, running up and down the hills as a vanguard, finally managed to secure us dinner.

Najmä počas môjho pôsobenia v Ilmenau zohrali v mojom vedeckom živote dôležitú úlohu workshopy „Cycles and Colorings“, ktoré každoročne v septembri organizovala grafárska skupina z Prírodovedeckej fakulty Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach v spolupráci s Technickou univerzitou v Ilmenau. Doteraz som sa zúčastnila na 21 z 31 workshopov a už som prihlásená na 32. workshop. Dvakrát som mala tú česť predniesť jednu z plenárnych prednášok.

Myslím si, že okrem prednášok s novými myšlienkami, riešeniami, problémami a výzvami sú veľmi dôležité osobné stretnutia s kolegami z viacerých krajín. Podľa môjho názoru je oveľa jednoduchšie nadviazať kontakt a spolupracovať, keď sa poznáme osobne a diskutujeme o rôznych veciach v uvoľnenej atmosfére.

Cennú spoluprácu som rozvinula so 14 kolegami, ktorých som spoznala na týchto workshopoch. Výsledkom tejto spolupráce bolo 28 publikácií a mala významný vplyv aj na moju habilitáciu.

Napríklad s už veľmi známym maďarským matematikom Zsoltom Tuzom som sa prvýkrát rozprávala na turistickej vychádzke počas 1. workshopu Cycles and Colorings v roku 1992. Začali sme spolupracovať a dodnes máme 19 spoločných publikácií čiastočne s ďalšími spoluautormi.

Mimochodom, spomínaná túra sa zapísala do histórie workshopu. Pred začiatkom organizátori hovorili o krátkej popoludňajšej prechádzke. Túru sme absolvovali popri rieke v Slovenskom raji s prekážkami v podobe rebríkov a reťazí na kamenistých brehoch. Keď sa zdalo, že stúpanie nemá konca, Peter Owens (anglický kolega) povedal legendárnu vetu: „*Dúfam, že rieka bude cyklus*“. Nakoniec si náš turistický sprievodca uvedomil, že sme sa stratili a máme len malú šancu, že sa do večera vrátíme na ubytovanie. Vysokorýchlostnej skupine štyroch kolegov, ktorí behali hore-dolu po kopcoch ako predvoj, sa nakoniec podarilo zabezpečiť nám večeru.

Ilmenauská a košická grafárska skupina zorganizovali aj sériu workshopov v inom formáte – workshopy ILKE. ILKE



The legendary trip-mentioned above, Slovenský raj, 1992. (Foto: Margit Voigt.)

The Ilmenau and Košice graph theory groups also organized a series of workshops in a different format – the ILKE workshops. ILKE is composed of the letters of the license plates of cars of the two cities Ilmenau (IL) and Košice (KE). The members of both groups and some guests met for a week in Germany or Slovakia to work together in a relaxed atmosphere. These workshops also led to many nice results and several publications. As I mentioned above, cooperation with colleagues from Košice and participation in the workshops they organized was very important for my scientific life and I enjoyed it very much

*Ďakujem veľmi pekne!*

sa skladá z písmen štátnych poznávacích značiek áut dvoch miest Ilmenau (IL) a Košíc (KE). Členovia oboch skupín a niektorí hostia sa stretli na týždeň v Nemecku alebo na Slovensku, aby spoločne pracovali v uvoľnenej atmosfére. Výsledkom týchto workshopov bolo aj mnoho pekných výsledkov a niekoľko publikácií. Ako som už spomínala, spolupráca s kolegami z Košíc a účasť na nimi organizovaných workshopoch bola pre môj vedecký život veľmi dôležitá a veľmi som si ju užila – Ďakujem veľmi pekne!

*Ďakujem veľmi pekne!*

Niečo o autorke:

Prof. Dr. rer. nat. hab. Margit Voigt je svetoznámu nemeckou matematickou pracujúcou v teórii grafov. Preslávil ju najmä príklad rovinného grafu, ktorý sa nedá zoznamovo zafarbiť štyrmi farbami. Je autorkou, resp. spoluautorkou 61 vedeckých publikácií a jednej monografie, na ktoré môžeme v citačných databázach nájsť najmenej 620 citácií. Jej Hirschov  $h$ -index je aspoň 13. Matematicky vyrástla na TU Ilmenau, kde sa pod vedením prof. H. Walthera habilitovala v roku 1996. V Ilmenau pracovala až do roku 2004, kedy získala profesorskú pozíciu na Dresden University of Applied Sciences v Dražďanoch. Od roku 2021 je na dôchodku.

Adresa autorky:

Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden, Friedrich-List-Platz 1, 7420,  
Dresden 01069, Germany  
e-mail: Margit.Voigt@gmx.net

## 3.15 A few examples of inspirations from Košice graph theory group

*Mariusz Woźniak*

The quality of the scientific team is demonstrated primarily by three things:

1. strictly scientific effects, *i. e.* the quality of publications,
2. the ability to train new staff,
3. the impact on a closer and further scientific community.

This latter issue is the subject of this text.

### *Introduction*

Let  $G = (V, E)$  be a graph. A function  $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  is called *an edge-coloring of  $G$* . Each edge-coloring defines a set (or a multiset) of colors of edges incident to a given vertex  $v$  called *palette* at  $v$ . Two vertices are distinguished if their palettes are different.

There are a lot of papers on distinguishing vertices of a graph by means of palettes defined by an edge-coloring.

The first work on this topic was probably a paper by Harary and Plantholt [8] of 1985, where they consider the problem of distinguishing all vertices by sets, and the coloring in question is general (*i. e.* not necessarily proper). The same problem, but concerning distinguishing vertices by multisets appeared in 1990 in a paper of Aigner and Triesch [1].

Finally, as a third possibility, in a paper [4] of Chartrand *et al.*, the distinction of vertices is made by the sum of colors of the edges in a palette, when the colors are natural numbers. This distinction seems somewhat artificial at first glance, but if we interpret the color of an edge as replacing it with a corresponding number of parallel edges, (*i. e.* converting a graph into a multigraph), the sum of colors of the edges in

## 3.15 Niekoľko príkladov inšpirácií z košickej skupiny teórie grafov

*Mariusz Woźniak*

O kvalite vedeckého tímu svedčia predovšetkým tri veci:

1. významný vedecký prínos, t. j. kvalita publikácií,
2. schopnosť vychovávať nových pracovníkov,
3. vplyv na užšiu a širšiu vedeckú komunitu.

Práve posledný bod je predmetom tohto príspevku.

*Úvod*

Nech  $G = (V, E)$  je graf. Funkciu  $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  nazývame *farbenie hrán* grafu  $G$ . Každé zafarbenie hrán definuje množinu (alebo násobok) zafarbených hrán danému vrcholu  $v$  a nazývame *paletou* pre daný vrchol  $v$ . Dva vrcholy sú odlišné, ak sú ich palety rôzne.

Existuje veľa prác o rozlišovaní vrcholov grafu pomocou paliet definovaných farbením hrán. Prvou prácou na túto tému bol pravdepodobne článok Hararyho a Plantholta [8] z roku 1985, kde sa zaoberajú problémom rozlišovania všetkých vrcholov pomocou množín, pričom dané zafarbenie je všeobecné (t. j. nemusí byť regulárne). Rovnaký problém, ale týkajúci sa rozlišovania vrcholov podľa viacnásobných množín sa objavil v roku 1990 v práci Aignera a Triescha [1].

A napokon, ako tretia možnosť, v práci [4] Chartranda a kol. sa rozlišovanie vrcholov uskutočňuje pomocou súčtu počtu farebných hrán v palette, keď sú farby prirodzené čísla. Toto rozlíšenie sa na prvý pohľad zdá trochu umelé, ale ak interpretujeme farbu hrany ako jej nahradenie príslušným počtom násobných hrán (t. j. prevedenie grafu na multigraf), súčet farebných hrán v palette pri danom vrchole je jednoducho stupeň tohto vrcholu vo výslednom multigrafe.

the palette at a given vertex is simply the degree of this vertex in the resulting multigraph.

The idea to consider the case when the edge coloring is proper, appeared independently in two places. In Košice, in Roman Soták's master thesis supervised by Mirko Horňák, and in Memphis, in the doctoral thesis of A. Burris supervised by R. Schelp. Appropriate publications appeared with a certain delay (cf. [5], [3]).

### *Štrba index*

I do not remember the exact circumstances of where and when this idea was born, but it must have been in Tatranská Štrba during several conferences from the "C&C" series.

We also assume now that the edge coloring is *proper*, *i. e.* all edges incident to a vertex have different colors. We are interested in minimizing the number of palettes taken over all possible proper (edge-) colorings of a graph. For a given graph  $G$ , we denote this number by  $\check{s}(G)$ .

Let us note that for regular graphs of class 1 (*i. e.* such that the number of colors needed to properly color the edges of the graph is equal to the maximum degree), all vertices have the same palette, so for such a graph  $\check{s}(G) = 1$ . However, if the graph is class 2, then we must use at least  $\Delta(G) + 1$  colors. For instance, in a standard edge-coloring of the complete graph  $K_n$ , for odd  $n$ , at each vertex a different color is missing. So we have  $n$  different palettes. The problem of coloring a complete graph was the beginning of our work on this index. It turns out that if we use more colors, we can significantly reduce the number of palettes.

While introducing this concept, Mirko Horňák and I used the term "štrba index". Ultimately, we changed it to the "palette index", but kept the "š" notation.

Our first paper (joint with Rafał Kalinowski and Mariusz Meszka) [10] was published in 2014. The preprint [9] was published 3 years earlier. This topic still arouses interest. The latest paper comes from 2024. As I have seen several times,



Myšlienka uvažovať o prípade, keď je zafarbenie hrán regulárne, sa objavila nezávisle na dvoch miestach. V Košiciach v diplomovej práci Romana Sotáka pod vedením Mirka Horňáka a v Memphise v doktorandskej práci A. Burrisa pod vedením R. Schelpa. Príslušné publikácie vyšli s určitým oneskorením (porovnaj [5], [3]).

### *Štrbský index*

Nepamätám si presne okolnosti, kde a kedy sa táto myšlienka zrodila, ale muselo to byť v Tatranskej Štrbe počas niekoľkých workshopov Cycles and Colourings.

Aj teraz predpokladáme, že zafarbenie hrán je *regulárne*, t. j. všetky hrany, ktoré sú incidentné s vrcholom, majú rôzne farby. Zaujímá nás minimálny počet paliet generovaný cez všetky možné regulárne (hranové) zafarbenia grafu. Pre daný graf  $G$  tento počet označíme  $\check{s}(G)$ .

Všimnime si, že pre regulárne grafy triedy 1 (t. j. také, že počet farieb potrebných na regulárne zafarbenie hrán grafu je rovný maximálnemu stupňu) majú všetky vrcholy rovnakú paletu, takže pre takýto graf  $\check{s}(G) = 1$ . Ak je však graf triedy 2, potom musíme použiť aspoň  $\Delta(G) + 1$  farieb. Napríklad v štandardnom farbení hrán úplného grafu  $K_n$  pre nepárne  $n$  v každom vrchole chýba iná farba. Máme teda  $n$  rôznych paliet. Problém zafarbenia úplného grafu bol začiatkom našej práce na tomto indexe. Ukázalo sa, že ak použijeme viac farieb, môžeme počet paliet výrazne znížiť.

Pri zavádzaní tohto pojmu sme s Mirkom Horňákom použili termín „štrbský index“. Nakoniec sme ho zmenili na „paletový index“, ale zápis „š“ sme si ponechali.

Náš prvý článok (spolu s Rafalom Kalinowskim a Mariuszom Meszkom) [10] bol publikovaný v roku 2014. Preprint [9] bol publikovaný o 3 roky skôr. Táto téma stále vzbudzuje záujem. Najnovší článok pochádza z roku 2024. Ako som sa už niekoľkokrát presvedčil, samotný zápis vzbudzuje veľký záujem (najmä medzi českými a slovenskými matematikmi).

the notation itself arouses great interest (especially among Czech and Slovak mathematicians).

*General coloring*

The so-called *general neighbor distinguishing index* (gndi) was also invented during one of the C&C conferences. I do not remember when it was, but I remember the circumstances well. And it was at the descent from Batizovské pleso to Tatranská Polianka. It was then that Mirko and I came up with the idea to distinguish adjacent vertices of a graph using sets. This method of discrimination has been known for a long time, but only when distinguishing all vertices.

Since, with  $k$  colors at our disposal, we can get at most  $2^k - 1$  sets, and taking into account the fact that adjacent vertices cannot have disjoint palettes, we get a lower bound for the appropriate parameter:

$$\lceil \log_2 \chi(G) \rceil + 1 \leq \text{gndi}(G).$$

So the problem was estimating this parameter from above. The first results on this topic were published in the form of preprints, in two series (see [12],[13]). When I presented them in Budapest in 2005, Ervin Győri became interested in this problem and proposed a significant improvement of the upper bound. Ultimately, the first published paper [6] has four co-authors and includes, among others, the following upper bound

$$\text{gndi}(G) \leq 2 \lceil \log_2 \chi(G) \rceil + 1.$$

The further history of this issue is also interesting.

Horňák and Soták, in turn, showed in [11] that, in fact,

$$\text{gndi}(G) \leq \lceil \log_2 \chi(G) \rceil + 1,$$

when  $\chi(G)$  is not a power of two. Finally, Győri and Palmer in [7] put a dot on the "i" and proved that for all graphs with  $\chi(G) \geq 3$  we have

$$\text{gndi}(G) = \lceil \log_2 \chi(G) \rceil + 1.$$

*Všeobecné zafarbenie*

Počas jednej z konferencií C&C bol vynájdený aj takzvaný *všeobecný index rozlišovania susedov* (gndi). Nepamätám si, kedy to bolo, ale dobre si pamätám okolnosti. A bolo to pri zostupe z Batizovského plesa do Tatranskej Polianky. Vtedy sme s Mirkom prišli na nápad rozlišovať susedné vrcholy grafu pomocou množín. Tento spôsob rozlišovania bol známy už dávno, ale len pri rozlišovaní všetkých vrcholov.

Keďže pri  $k$  farbách, ktoré máme k dispozícii, môžeme získať najviac  $2^k - 1$  množín a pri zohľadnení faktu, že susedné vrcholy nemôžu mať disjunktné palety, dostaneme dolnú hranicu príslušného parametra:

$$\lceil \log_2 \chi(G) \rceil + 1 \leq \text{gndi}(G).$$

Problémom bol teda odhad tohto parametra zhora. Prvé výsledky na túto tému boli publikované vo forme preprintov v dvoch článkoch (pozri [12],[13]). Keď som ich prezentoval v Budapešti v roku 2005, Ervin Győri sa začal o tento problém zaujímať a navrhol výrazné zlepšenie hornej hranice. Nakoniec prvý publikovaný článok [6] má štyroch spoluautorov a obsahuje okrem iného túto hornú hranicu

$$\text{gndi}(G) \leq 2 \lceil \log_2 \chi(G) \rceil + 1.$$

Zaujímavá je aj ďalšia história tohto problému. Hornák a Soták zase v [11] ukázali, že v skutočnosti,

$$\text{gndi}(G) \leq \lceil \log_2 \chi(G) \rceil + 1,$$

keď  $\chi(G)$  nie je mocninou dvoch. Napokon Győri a Palmer v [7] dali bodku na „i“ a dokázali, že pre všetky grafy s  $\chi(G) \geq 3$  platí

$$\text{gndi}(G) = \lceil \log_2 \chi(G) \rceil + 1.$$

Ide pravdepodobne o jediný prípad, keď bol parameter súvisiaci s rozlišovacími problémami (a takýchto parametrov je minimálne niekoľko desiatok) vyjadrený pomocou iného parametra grafu.

This is probably the only case where a parameter related to distinguishing problems (and there are at least several dozens of such parameters) was expressed using another graph parameter.

### *1-2 Conjecture*

In April 2005, while traveling with Monika Pilšniakova to a conference in Budapest, we stopped for a short visit to Košice. The conversation that took place over coffee in Stano Jendrol's office had significant consequences for me. At that time, the 1-2-3 Conjecture was already known. It claimed that by labeling (coloring) the edges of a graph with the numbers 1, 2 and 3 and then calculating the sums at each vertex, one can distinguish neighboring vertices. This conjecture was formulated by Karoński, Łuczak and Thomason in [14] and quickly gained popularity. A similar problem, but related to distinguishing all vertices of a graph, has been known for a long time (since 1988, see [4]), and the appropriate parameter was called *irregularity strength*. This parameter has been studied very intensively. It suffices to mention that a review article about it has already been published in 1991 ([16]).

Well, during the above-mentioned meeting, Stano Jendrol' drew my attention to his work (together with Martin Bača, Mirka Miller, and Joe Ryan, see [2]) where an issue analogous to irregularity strength is considered, but in the case of *total coloring*, i. e. coloring edges and vertices of a graph. If the parameter referred to in 1-2-3 Conjecture is called *local irregularity strength*, then three parameters were considered at that time: irregularity strength, local irregularity strength and total irregularity strength. This suggested that we consider a fourth, somewhat missing parameter, *total local irregularity strength*. And that's exactly what we did. Together with Jakub Przybyło, we formulated the so-called 1-2 Conjecture, which says that two colors, 1 and 2, are enough to distinguish adjacent vertices if we color both edges and vertices.

### 1-2 hypotéza

V apríli 2005, keď sme cestovali s Monikou Pilšniakovou na konferenciu do Budapešti, sme sa zastavili na krátku návštevu Košíc. Rozhovor, ktorý sa odohral pri káve v kancelárii Stano Jendroľa, mal pre mňa významné dôsledky. V tom čase už bola známa domnienka 1-2-3. Tvrdila, že označením (vyfarbením) hrán grafu číslami 1, 2 a 3, a následným sčítaním súčtov v každom vrchole možno rozlíšiť susedné vrcholy. Túto domnienku sformulovali Karoński, Łuczak a Thomason v [14] a rýchlo si získala popularitu. Podobný problém, ale týkajúci sa rozlišovania všetkých vrcholov grafu, bol známy už dlho (od roku 1988, pozri [4]), a príslušný parameter sa nazýval *sila nepravidelnosti*. Tento parameter sa veľmi intenzívne skúmal. Stačí spomenúť, že prehľadový článok o ňom bol uverejnený už v roku 1991 ([16]).

No a na spomínanom stretnutí ma Stano Jendroľ upozornil na svoju prácu (spolu s Martinom Bačom, Mirkou Millerovou a Joeom Ryanom, pozri [2]), kde sa uvažuje o analogickej problematike ako pri sile nepravidelnosti, ale v prípade *celkového zafarbenia*, t. j. farbenia hrán a vrcholov grafu. Ak sa parameter, o ktorom sa hovorí v 1-2-3 hypotéze, nazýva *lokálna sila nepravidelnosti*, potom sa vtedy uvažovalo o troch parametroch: sile nepravidelnosti, lokálnej sile nepravidelnosti a celkovej sile nepravidelnosti. To nás viedlo k tomu, aby sme zvážili štvrtý, trochu chýbajúci parameter, *celková lokálna sila nepravidelnosti*. A presne to sme urobili. Spolu s Jakubom Przybyłom sme sformulovali takzvanú 1-2 hypotézu, ktorá hovorí, že na rozlíšenie susedných vrcholov stačia dve farby, 1 a 2, ak zafarbíme hrany aj vrcholy.

Adrian Bondy kedysi zaradil 1-2-3 hypotézu, rovnako ako 1-2 hypotézu, medzi najkrajšie hypotézy teórie grafov.

Hypotéza 1-2 je stále otvorená, zatiaľ čo hypotézu 1-2-3 dokázal minulý rok Ralph Keutsch (pozri [15]).

Adrian Bondy once included the 1-2-3 Conjecture, as well as the 1-2 Conjecture, among the most beautiful conjectures of graph theory.

The 1-2 Conjecture is still open, while the 1-2-3 Conjecture was proven last year by Ralph Keutsch (see [15]).

### *Summary*

I hope that the examples given above regarding distinguishing problems clearly show that the **"Košice School of Discrete Mathematics"** is distinguished.

While emphasizing the advantages of cooperation with colleagues from Košice, it is also worth emphasizing the exceptionally nice atmosphere accompanying this cooperation. An important element of this atmosphere was undoubtedly the famous "Face Coloring Algorithm" promoted by Stano at the "Cycles and Colourings" conferences.

**Acknowledgment.** I would like to thank all my friends from Košice for the moments spent together on scientific discussions, on mountain trips and in other places.

*Ďakujem.*

### *Appendix*

From what I wrote above, it is easy to understand that the Bronze Medal of Merit of the Faculty of Sciences of the UPJŠ University in Košice I received in 2018 from the dean of the faculty, Gabriel Semanišin, is extremely valuable to me. It was in Krakow, where Gabo delivered a lecture on the occasion of the 500th meeting of the Discrete Mathematics seminar (counting from the moment when the history of the seminar began to be written on the website <http://www.seminarium.kmd.agh.edu.pl/>). Photo from this occasion - below.

### *Zhrnutie*

Dúfam, že vyššie uvedené príklady týkajúce sa rozlišovacích problémov jasne ukazujú, že „*Košická škola diskkrétnej matematiky*“ je veľmi významná. Pri vyzdvihovaní výhod spolupráce s košickými kolegami je potrebné zdôrazniť aj mimoriadne príjemnú atmosféru, ktorá túto spoluprácu sprevádza. Dôležitým prvkom tejto atmosféry bol nepochybne aj slávny „*Algoritmus farbenia tváří*“, ktorý Stano propagoval na workshopoch *Cycles and Colourings*.

**PodĎakovanie.** Chcel by som sa poďakovať všetkým priateľom z Košíc za spoločne strávené chvíle pri vedeckých diskusiách, na horských výletoch a na iných miestach.

*Ďakujem.*

### *Appendix*

Z toho, čo som napísal vyššie, je ľahké pochopiť, že bronzová medaila *Za zásluhy o rozvoj Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach*, ktorú som v roku 2018 dostal od dekana fakulty Gabriela Semanišina, je pre mňa mimoriadne cenná. Bolo to v Krakove, kde Gabo predniesol prednášku pri príležitosti 500. výročia seminára z diskkrétnej matematiky (počítajúc od momentu, keď sa začala písať história seminára na webovej stránke <http://www.seminariumkmd.agh.edu.pl/>). Fotografia z tejto príležitosti - nižšie.



Prof. Gabriel Semanišin and prof. Mariusz Woźniak, 2018. (Zdroj: Mariusz Woźniak.)

Niečo o autorovi:

Prof. dr hab. Mariusz Woźniak je špičkový poľský matematik, ktorý sa na medzinárodnej scéne presadil predovšetkým svojimi výsledkami v chromatickej teórii grafov. Pôsobí na Katedre diskkrétnej matematiky Fakulty aplikovaných vied krakovskej AGH (Akademia Górniczo-Hutnicza AGH je jedna z desiatich poľských vysokých škôl, ktoré majú právo nazývať sa vedeckovýskumnou inštitúciou.) Katedra je známa kvalitnou výchovou mladých adeptov vedy; výrazný podiel má na tom prof. M. Woźniak, ktorý je žičlivý aj vo vzťahu ku každému z kolegov svojej výskumnej skupiny. Podľa databázy Scopus je prof. Woźniak autorom, resp. spoluautorom, 95 pôvodných vedeckých prác, na ktoré je zaznamenaných viac než 800 citácií; z toho rezultuje  $h$ -index 14: každá z jeho štrnástich najcitovanejších prác je citovaná (s vylúčením autocitácií) aspoň štrnásť ráz. Pochváliť sa môže aj Erdősovým číslom 2. Je členom redakčnej rady karentovaného časopisu *Discussiones Mathematicae Graph Theory*.

Adresa autora:

Department of Discrete Mathematics, AGH University, Kraków, Poland  
e-mail: mwozniak@agh.edu.pl



---

## LITERATÚRA

---

- [1] M. Aigner, E. Triesch, *Irregular assignments and two problems à la Ringel*, In: Topics and Combinatorics and Graph Theory, dedicated to G. Ringel (Bodendiek, Henn, eds.) Physica Verlag Heidelberg (1990), 29–36.
- [2] M. Bača, S. Jendrol', M. Miller, J. Ryan, *On Irregular Total Labelings*, Discrete Math. 307 (2007), 1378–1388.
- [3] A. C. Burriss and R. H. Schelp, *Vertex-distinguishing proper edge-colorings*, J. Graph Theory, 26(2) (1997), 73–82.
- [4] G. Chartrand, M.S. Jacobson, J. Lehel, O.R. Oellermann, S. Ruiz, F. Saba, *Irregular networks*, Congr. Numer. 64 (1988), 197–210.
- [5] J. Černý, M. Horňák and R. Soták, *Observability of a graph*, Math. Slovaca, 46 (1996), 21–31.
- [6] E. Győri, M. Horňák, C. Palmer and M. Woźniak, *General neighbour-distinguishing index of a graph*, Discrete Math., 308 (5-6) (2008), 827–831.
- [7] E. Győri, C. Palmer, *A new type of edge-derived vertex coloring*, Discrete Math., 309(22) (2009), 6344–6352.
- [8] F. Harary and M. Plantholt, *The point-distinguishing chromatic index*, in: Graphs and Applications (F. Harary and J. S. Maybee, Eds.), Wiley-Interscience, New York 1985, 147–162.
- [9] M. Horňák, R. Kalinowski, M. Meszka and M. Woźniak, *Minimum Number of Palettes in Edge Colorings*, Preprint Nr MD 053 (2011), [www.ii.uj.edu.pl/preMD//](http://www.ii.uj.edu.pl/preMD//)

- [10] M. Horňák, R. Kalinowski, M. Meszka, M. Woźniak, *Minimum number of palettes in edge colorings*, *Graphs Combin.* **30** (2014), 619–626.
- [11] M. Horňák and R. Soták, *General neighbour-distinguishing index via chromatic number*, *Discret. Math.* **310** (2010), 1733–1736.
- [12] M. Horňák and M. Woźniak, *General neighbour-distinguishing index of a graph*, PJS University, Faculty of Science, IM Preprint, series A, 3//2005.
- [13] M. Horňák and M. Woźniak, *General neighbour-distinguishing index of a graph*, Preprint Nr MD 011 (2005), [www.ii.uj.edu.pl//preMD//](http://www.ii.uj.edu.pl//preMD//)
- [14] M. Karoński, T. Łuczak, A. Thomason, *Edge weights and vertex colours*, *J. Combin. Theory Ser. B* **91** (2004) 151–157.
- [15] M. Keutsch, *A solution to the 1-2-3 conjecture*, *J. Combin. Theory Ser. B* **166** (2024) 183–202.
- [16] J. Lehel, *Facts and quests on degree irregular assignments*, *Graph Theory, Combinatorics, and Applications*, Willey, New York (1991), 765–782.
- [17] J. Przybyło and M. Woźniak, *1,2 Conjecture*, Preprint Nr MD 024 (2007), [www.ii.uj.edu.pl//preMD//](http://www.ii.uj.edu.pl//preMD//)
- [18] J. Przybyło and M. Woźniak, *1,2 Conjecture, II*, Preprint Nr MD 026 (2007), [www.ii.uj.edu.pl//preMD//](http://www.ii.uj.edu.pl//preMD//)
- [19] J. Przybyło and M. Woźniak, *On a 1,2 Conjecture*, *Discrete Math. Theoretical Computer Science*, **12** (1) (2010), 101–108.

---

## SPOMIENKY ÚČASTNÍKOV KONFERENCIE KOŠICKÝCH MATEMATIKOV

---

Nemalým dielom v rozvoji Košickej matematickej školy prispela Konferencia košických matematikov. Prvotnou myšlienkou bolo stretávanie ľudí z okolia Košíc, ktorých matematika nielen „živí“, alebo ich očarila, alebo ju študujú. Túto myšlienku pretavil do reality prof. Stanislav Jendroľ, ktorý stál pri jej začiatkoch a dlho to niesol na svojich pleciach. Dodnes pomáha dobrou radou, ale aj presvedčením a pozvaním vzácných hostí prednášať na túto konferenciu. Celé sa to začalo 17. – 18. apríla 1998, keď sa uskutočnil 1. ročník tejto konferencie v Herľanoch. Od toho momentu vždy dokázali pozvať zaujímavých hostí z rôznych, nielen matematických oblastí, ktorí vo svojej práci využívajú matematiku a z rôznych krajín sveta (USA, Rusko, Česká republika, Nemecko, Maďarsko, Poľsko, ...). Práve to bolo magnetom na pritiahnutie mnohých účastníkov, medzi ktorých patrili i stredoškolskí učitelia a študenti matematiky. V tomto roku sa 25. – 27. apríla uskutočnil jej 22. ročník. Posledné roky už k hlavným organizátorom patrí Erika Fecková Škrabuľáková spolu s Andreou Feňovčíkovou a Jánom Bušom. Konferencie košických matematikoch v Herľanoch sa počas 22 ročníkov zúčastnilo viac ako 350 rôznych účastníkov. A práve z nich sme oslovili tých, ktorí sa najčastejšie zúčastnili tejto konferencie a prinášame vám ich pohľad na uvedené podujatie.

Podrobnejšie informácie o jednotlivých ročníkoch tejto konferencie môžete nájsť na stránke <https://jsmf.fberg.tuke.sk/>

## 4.1 Konferencia košických matematikov v mojom živote

Ján Buša

V pozvánke na 1. KKM sa píše:

Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice, v spolupráci s katedrami matematiky Univerzity P. J. Šafárika, Technickej univerzity a Vojenskej leteckej akadémie v Košiciach Vás srdečne pozýva na

### PRVÚ KONFERENCIU KOŠICKÝCH MATEMATIKOV

Herľany 17.–18. apríl 1998

Cieľom konferencie je zintenzívniť stavovský život všetkých, ktorí sa v Košiciach a okolí profesionálne živia matematikou (t.j. učiteľov všetkých typov škôl, pracovníkov na poli matematických a informatických vied a aplikácií matematiky v priemysle, bankovníctve, informatike a inde) a formulovať základné oblasti ich stavovských záujmov.

Myslím si, že táto formulácia cieľov KKM je veľmi výstižná a vydarená. Mňa osobne oslovila hneď od začiatku organizovania KKM, a tak sa táto pre mňa stala jednou z najvýznamnejších *spoločenských udalostí*, pravidelne sa opakujúcich „každý“ rok.

V čase konania 1. KKM som mal takmer 40 rokov a za sebou 11,5 roka pedagogickej praxe na Katedre matematiky FEI TU v Košiciach, ale vzhľadom na to, že som študoval mimo Košíc, stále som cítil nedostatok informácií o košických kolegoch – matematikoch. Preto by som odbornú i neodbornú komunikáciu v rámci konferencie zaradil na 1. miesto v „rebríčku“ prínosov KKM. Toto ešte znásobovalo prostredie Učebno-výcvikového zariadenia TU v Herľanoch.

Počas vyše dvadsiatich rokov som sa, samozrejme, zoznámil s celým radom mimokošických osobností z oblasti matematiky zo Slovenska i zahraničia, ktoré zavítali na KKM,

aby predniesli pozvané prednášky a podelili sa so svojimi skúsenosťami z výučby či vedeckej práce. Spoločenské posedenia konané v piatok večer boli (a aj naďalej sú) spojené s ochutnávkou kvalitných vín, ktorá menila charakter „večierkov“ z prevažne odborného na kultúrny, spojený s masovou interpretáciou piesní. Viacerí účastníci preukázali aj svoje inštrumentálne schopnosti hry na pianíne, gitare či iných nástrojoch. Často tieto posedenia končili po polnoci. Postranný pozorovateľ by si asi nepomyslel, že sa zabávajú „suchí“ matematici.

Konferenciu košických matematikov nepovažujem za vedecké podujatie. Napriek tomu sa každý rok na nej prezentujú kvalitné výsledky vedeckého výskumu. Tieto prezentácie bývajú „živšie“ ako bežné prezentácie na vedeckých podujatiach aj vzhľadom na to, že mnohí účastníci sa vedeckej práci nevenujú alebo sa jej venujú „okrajovo“. Myslím si, že aj učiteľov stredných či základných škôl zaujíma, akej matematike sa venujú kolegovia z univerzít alebo akademických pracovísk.

Pre mňa veľmi zaujímavé bývajú príspevky o výučbe matematiky na všetkých stupňoch škôl. Často boli diskutované aj „všeobecné“ otázky výučby, spojené s „rekonštrukciou“ (t. j. redukciou) osnov, znížením počtu hodín výučby matematiky (ale i iných predmetov), či otázky povinnej maturity z matematiky. Poprední slovenskí ale i zahraniční pedagógovia sa delia so svojimi skúsenosťami a predstavami, ako a čo učiť. Prednášajú však aj učitelia stredných a základných škôl. Tieto prednášky sú doplnené informáciami o organizácii matematickej olympiády a rôznych matematických seminárov, vrátane korešpondenčných. Prial by som si, aby mali deti alebo aj študenti univerzít viac možností zapájať sa do mimoškolských matematických aktivít, avšak toto je spojené s voľným časom alebo dobrovoľníckym nadšením organizátorov.

Mňa osobne zaujímajú tiež otázky prípravy kvalitných študijných materiálov (nielen po obsahovej ale aj po formálnej stránke). Rád si spomínam na niekoľko prednášok venovaných aplikáciám  $\TeX$ u pri príprave záverečných prác, interaktívnych PDF súborov a systému „Mathematical assistant on

Web“. Aj generovanie a hodnotenie zadaní má v prípade veľkého množstva študentov svoje miesto v pedagogike.

Konferencia košických matematikov dáva od istej doby priestor doktorandom na prezentáciu ich vedeckých výsledkov. Myslím si, že títo stále nemajú dostatok podobných príležitostí. Požiadavky sú štandardné, väčšina príspevkov je (v rámci tréningu) prednesená v angličtine.



Konferencia košických matematikov, 2016. (Foto: Ján Buša.)

Všetci účastníci i organizátori sa tešia na chvíľu, kedy program konferencie naruší Herliansky gejzír (viď obrázok). Keďže konferencia v poslednej dobe trvá obyčajne 3–4 dni, šanca na takéto prerušenie je vysoká. V prípade nočnej erupcie si niektorí účastníci nastavujú budík, aby tento zážitok nepremrhali.

Na organizovaní KKM som sa podieľal od jej 3. ročníka. Aj keď organizácia konferencie prináša isté stresové situácie, na KKM som sa vždy tešil a verím, že všetci účastníci všetkých ročníkov si z nej odniesli len tie najlepšie spomienky. Držím palce organizátorom ďalších ročníkov.

Niečo o autorovi:

Doc. RNDr. Ján Buša, CSc. je absolventom odboru Aplikovaná matematika na Fakulte numerickej matematiky a kybernetiky Moskovskej štátnej univerzity v Moskve (ZSSR) v r. 1982. Na tej istej fakulte bol v rokoch 1982 – 1986 vedeckým aspirantom. Kandidatúru obhájil a získal titul CSc. v r. 1987. Od roku 1986 až do roku 2019 pracoval na Elektrotechnickej fakulte VŠT v Košiciach neskôr premenovanej na Fakultu elektrotechniky a informatiky Technickej univerzity. Na tej istej fakulte sa v roku 2017 habilitoval (za docenta) v odbore Informatika. Od r. 2019 pracuje na Spojenom ústave pre jadrový výskum v Dubne (Rusko). Od júna 1999 až doteraz je členom výboru Košickej pobočky JSMF, pričom v tých istých rokoch (s výnimkou rokov 2018 – 2023) zastával funkciu tajomníka výboru. Bol členom organizačných výborov KKM od jej 3. až do 22. ročníka.

Adresa autora:

Laboratórium informačných technológií M. G. Meščerjakova  
Spojený ústav pre jadrový výskum Dubna  
Moskovská oblasť  
Ruská Federácia  
e-mail: [jan.busa@tuke.sk](mailto:jan.busa@tuke.sk)

## 4.2 Moje spomienky na pozvanú prednášku v roku 2016

*Stanislav Lukáč*

Pri spomienkach na konferencii košických matematikov v Herlanoch sa mi ako prvá vybaví prednáška, ktorú som mal na konferencii v roku 2016. V tomto období sme sa intenzívne venovali bádateľsky orientovanej výučbe, ktorá môže zohrať dôležitú úlohu pri zvyšovaní samostatnosti a aktivity žiakov pri učení sa prírodovedných predmetov a matematiky a prebudení záujmu mladých ľudí o prírodovedné vzdelávanie. Snahy o skvalitnenie prírodovedného a matematického vzdelávania, o propagovanie a zavádzanie bádateľských prístupov k vzdelávaniu sa premietli do viacerých národných aj medzinárodných projektov. V rokoch 2013 až 2016 didaktici matematiky, fyziky a informatiky na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach riešili spoločne projekt podporený agentúrou APVV s názvom *Výskum efektívnosti metód inovácie výučby matematiky, fyziky a informatiky*. Pri riešení projektu spolupracovali aj učitelia matematiky, fyziky a informatiky zo šiestich gymnázií. Hlavnými cieľmi projektu bolo vypracovať metodické a učebné materiály pre efektívne využitie bádateľských prístupov k vzdelávaniu a realizáciou letných škôl objasniť učiteľom matematiky, fyziky a informatiky problematiku aplikovania bádateľských prístupov k vyučovaniu. Dôležitým cieľom letných škôl bolo aj pripraviť učiteľov na uskutočnenie pedagogického experimentu v reálnych školských podmienkach zameraného na analýzu možností implementovania bádateľských prístupov do vzdelávania, meranie a vyhodnotenie účinkov bádateľsky orientovaného vyučovania na rozvoj bádateľských spôsobilostí žiakov.

Začiatkom roku 2016 som dostal ponuku na prednášku na 17. Konferencii košických matematikov. Možnosť prezentovať sa na konferencii pozvanou prednáškou ma príjemne prekvapila, ale zároveň som pociťoval rešpekt a uvedomoval som si, že obsah prednášky a podpornej prezentácie bude po-



trebné dôkladne a zodpovedne pripraviť. Dňa 8.4.2016 odznel môj príspevok s názvom *Rozvíjanie bádateľských spôsobilostí vo vyučovaní matematiky* (Development of Inquiry Skills in Mathematics Teaching). V príspevku bol predstavený aj systém klasifikácie bádateľských spôsobilostí obsahujúci päť základných kategórií bádateľských spôsobilostí odvodených z charakteru bádateľských činností žiakov. Dôležitú časť príspevku tvorili ukážky námetov na realizáciu bádateľských aktivít vo vyučovaní rôznych tém zo školskej matematiky.

Na hodnotenie úspešnosti bádateľsky orientovaného vyučovania boli využité viaceré metódy založené na dotazníkových prieskumoch, formulároch zameraných na reflexiu učiteľa, analýze žiackych riešení úloh v pracovných listoch a hodnotiacich rubrikách. V spolupráci s učiteľmi zapojenými do riešenia projektu boli žiakom zadané testy, ktoré slúžili ako hlavný diagnostický nástroj na meranie úrovne rozvoja vybraných bádateľských spôsobilostí žiakov v priebehu pedagogického experimentu. Porovnanie výsledkov 300 žiakov vo vstupnom a výstupnom teste využitím štatistickej analýzy prinieslo viaceré zaujímavé výsledky [Ješková, Z. et al.: *Efficacy of inquiry-based learning in mathematics, physics and informatics in relation to the development of students' inquiry skills. Journal of Baltic Science Education*, 15 (5), 2016, 559-574.]. Vo výstupnom teste zadanom po realizácii vybraných bádateľsky orientovaných aktivít vo vyučovaní matematiky, fyziky a informatiky v priebehu jedného školského polroka dosiahli žiaci v priemere približne o 7% vyššiu úspešnosť ako vo vstupnom teste, čo sa ukázalo ako štatisticky významné zlepšenie. Najväčšie zlepšenie, a to približne o 14%, dosiahli žiaci v rozvoji bádateľskej spôsobilosti vysvetľovať svoje riešenie, argumentovať. Uvedené zlepšenie ovplyvnila však aj skutočnosť, že vo vstupnom teste napriek vyzvaniu niektorí žiaci neuvádzali zdôvodnenie svojich odpovedí.

Výsledky nášho výskumu ukázali, že systematické využívanie bádateľských prístupov vo vyučovaní matematiky, fyziky a informatiky stimuluje rozvoj bádateľských spôsobilostí žiakov. Vytvorené a aj v školskej praxi vyskúšané učebné

a metodické materiály boli učiteľom sprístupnené v publikácii, ktorá je dostupná aj na internete. Pri plánovaní vyučovacieho procesu tak majú učitelia k dispozícii rozpracované námety na realizáciu bádateľských aktivít, ktoré môžu ďalej rozvíjať a prispôbovať schopnostiam žiakov vo svojich triedach. Výsledky a skúsenosti z riešenia opisovaného projektu boli využité a ďalej rozvíjané pri realizácii našich ďalších výskumov a aj pri riešení národného projektu IT Akadémia.



Konferencia košických matematikov, Herľany, 2012. (Z prednášajúcich spomenutých v článku: S. Lukáč (v prvom rade zľava), M. Ciosek (v prvom rade v strede nad R. Fričom), Z. Kubáček (v prvom rade štvrtý zľava) a S. Jendroľ (v prvom rade druhý zľava))(Zdroj: Jaroslav Šupina.)

Aj keď spomienky na pozvanú prednášku sú stále dominujúce, rád by som sa zmienil aj o niektorých ďalších príspevkoch. Konferencií košických matematikov v Herľanoch som sa nezúčastňoval pravidelne. Dôvodom bola aj skutočnosť, že v piatok som často vyučoval na rozširujúcom štúdiu matematiky. Na konferenciách, ktorých som sa zúčastnil, odznelo veľa zaujímavých prednášok, ale zameriam sa na tie, ktoré

úzko súviseli so zameraním našich výskumov a boli pre mňa veľmi inšpirujúce a podnetné.

1. Ako veľmi zaujímavé by som vyzdvihol prednášky týkajúce sa tvorby učebníc. Profesor Šedivý vo svojej prednáške v roku 2003 predstavil koncepciu učebníc matematiky pre druhý stupeň základnej školy. Autor učebníc vysvetlil, ako pri rozložení vzdelávacieho obsahu do jednotlivých ročníkov a aj pri jeho didaktickom spracovaní zohľadňovali vývoj matematických predstáv detí a ich chápania pojmov aj v súvislosti s psychickým vývinom detí. Doc. Z. Kubáček sa vo svojom príspevku v roku 2012 venoval objasneniu viacerých aspektov a otázok, nad ktorými sa zamýšľajú autori učebníc matematiky pri tvorbe koncepcie a didaktického spracovania učebníc. Z odpovedí na tieto otázky pramenia rôzne prístupy k vypracovaniu učebníc matematiky. Autor sa v prednáške zameril na učebnice pre vyučovanie matematiky na strednej škole.

2. Prof. J. Kopka sa vo svojej prednáške v roku 2007 venoval stratégií riešenia problémov založenej na preformulovaní problému. Autor čerpal námety zo svojho výskumu zameraného na heuristické stratégie riešenia matematických problémov a ich využitie pri podpore aktívneho učenia sa založenom na samostatnom žiackom skúmaní. V príspevku autor predstavil aplikáciu stratégie preformulovania pri riešení problémov vhodných pre vyučovanie matematiky.

3. V roku 2012 mala zaujímavú prednášku prof. M. Ciosek z Pedagogickej univerzity v Krakove. Vo svojom výskume rozvíjala niektoré myšlienky významnej poľskej pedagogy Krygowskej. Autorka sa v prednáške zamerala na priebeh procesu zovšeobecňovania pri konštrukcii matematických pojmov a riešení otvorených matematických problémov. S výskumníkmi z tejto univerzity sme už mali nadviazané určité formy spolupráce a v roku 2012 sme boli spolu s doc. D. Švedom pozvaní na seminár k vyučovaniu matematiky na Pedagogickú univerzitu v Krakove. Moja prednáška bola zameraná na e-learningovú podporu vzdelávania budú-

cich učiteľov matematiky. V prednáške som predstavil vybrané výsledky výskumu orientovaného na implementáciu interaktivity do digitálnych učebných materiálov. Hlavný dôraz bol kladený na poskytovanie spätnej väzby vo forme „primeranej“ miery pomoci na základe odstupňovaného systému pomocných informácií.

4. Prof. K. Žilková v roku 2015 vo svojom príspevku charakterizovala koncepty a miskoncepce pri výučbe vlastností geometrických útvarov. Jej prednáška bola zameraná na vyučovanie geometrie na rôznych stupňoch vzdelávania a popis úrovni rozvoja geometrického myslenia. Pri charakterizovaní jednotlivých úrovni geometrického myslenia boli miskoncepce žiakov ilustrované zaujímavými príkladmi z vyučovania geometrie. Uvedené miskoncepce a príklady nedostatočného rozvoja geometrickej predstavivosti žiakov ma inšpirovali pri tvorbe obsahu predmetu *Dynamická geometria*, ktorý som v tomto období začínal vyučovať.

5. V prednáške doc. M. Slavíčkovej v roku 2016 boli predstavené hlavné úlohy riešené v projekte *Apps in Maths*, ktorý bol zameraný na vývoj matematických aplikácií pre podporu vyučovania matematiky. Táto problematika bola pre mňa veľmi zaujímavá, lebo v našom výskume sme sa intenzívne venovali možnostiam a spôsobom implementovania digitálnych technológií do vzdelávania. Naši doktorandi Engel a Buxár sa zaoberali vývojom interaktívnych aplikácií pre výučbu vybraných tém zo školskej matematiky. Tejto problematike bolo venovaných aj niekoľko článkov v didaktickom časopise MIF, ktorý vychádzal do roku 2012 a bol určený hlavne pre učiteľov matematiky, informatiky a fyziky. Kolegyňa Slavíčková nám ako členka redakčnej rady s veľkým zánietením pomáhala s činnosťami spojenými s vydávaním tohto časopisu.

Vo svojom príspevku som spomenul len niektorých kolegov z množstva prednášajúcich, ktorí mali na konferenciách zaujímavé prednášky. Konferencie košických matematikov som vnímal veľmi pozitívne. Na záver by som rád poďakoval organizátorom týchto konferencií za to, že venovali svoj čas

a energiu na usporiadanie konferencií aj na prilákanie osobností v matematike a jej vyučovaní nielen z Košíc, Slovenska, ale i zo zahraničia.

Niečo o autorovi:

Autor je absolventom Prírodovedeckej fakulty Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach. Štúdium v odbore Učiteľstvo akademických predmetov matematika-fyzika ukončil v roku 1985. Po ukončení štúdia nastúpil ako učiteľ na gymnázium Opatovská cesta 7 v Košiciach. V rámci rozširujúceho štúdia si rozšíril svoju aprobáciu o predmet Výpočtová technika na ZŠ a SŠ. V roku 1996 nastúpil ako odborný asistent na Prírodovedeckú fakultu UPJŠ v Košiciach. Doktorandské štúdium na tejto fakulte ukončil v roku 2002 a získal titul PhD. vo vednom odbore Teória vyučovania matematiky. Téma dizertačnej práce bola Informačné technológie z hľadiska potrieb učiteľa matematiky. Vo svojom výskume sa venuje hlavne implementácii bádateľských prístupov do vyučovania matematiky s podporou moderných digitálnych technológií. Výsledky svojho výskumu mohol využiť a ďalej rozvíjať pri riešení národných projektov Infovek, Modernizácia vzdelávacieho procesu na SŠ a IT Akadémia. V roku 2012 sa habilitoval na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach v odbore Teória vyučovania matematiky. Téma habilitačnej práce bola Rozvíjanie digitálnych kompetencií učiteľov matematiky. V súčasnosti pôsobí na Ústave matematiky na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach vo funkcii docenta.

Adresa autora:

Ústav matematiky,  
Prírodovedecká fakulta UPJŠ v Košiciach  
Jesenná 5, 04001 Košice  
e-mail: stanislav.lukac@upjs.sk

## 4.3 Celok (konferencia) je viac ako súčet jeho častí

*Tomáš Madaras*

Keby som sa pokúsil v pamäti vyloviť „prvotnú spomienku“ na svoju prvú účasť na Konferencii košických matematikov, bol by to azda jej piaty ročník (v roku 2003), kde ako súčasť (večerného) programu bola ohlásená prednáška „Teória grafov a LMH“ (čo bolo kryptickou pozvánkou na oslavu päťdesiatych narodenín nášho kolegu Mirka Horňáka). V neskorších rokoch som sa konferencie zúčastňoval len sporadicky, od roku 2018 (s pandemickou prestávkou) však opäť „regulárne“ a s vďačnosťou, že konferencia „žije a kvitne“.

Od začiatku sa organizátori konferencie snažili pozývať známe a zaujímavé osobnosti slovenskej, resp. (stredo)európskej matematickej scény, ktorých pozvané prednášky by prístupnou formou priblížili rôzne oblasti matematiky širokému spektru účastníkov. Popri rozličnej zaujímavej matematike (i mimo môjho oboru výskumu), ktorá sa preberala v prednáškach rečníkov, bolo taktiež zaujímavé (a inšpiratívne) sledovať i spôsob výkladu a podanie príspevku prednášateľov – v tomto smere mi utkvelo v pamäti dávnejšie vystúpenie prof. Pavla Zlatoša i nedávna prednáška Honzy Širůčka z Masarykovej univerzity v Brne. Plus – ako to pri podujatiach tohto typu býva – nezanedbateľná výmena matematických informácií, podnetov a námetov pre ďalší výskum sa diala a deje „v kuloároch“ pri neformálnych stretnutiach s inými matematikmi. Milé (a inšpirujúco-poučné) boli tiež stretnutia s kolegyňami, ktoré vyučujú matematiku (a vyučujú ju veľmi dobre) na stredných školách, a ktoré som roky nevidel. Snahou organizátorov konferencie je čoraz viac rozšíriť jej záber a dostupnosť aj pre učiteľov matematiky mimo univerzít; zdá sa, že tento zámer sa im darí naplňať, nakoľko počet účastníkov konferencie z tejto sféry postupne vzrastá.

Na odporúčanie svojich školiteľov sa konferencie pravidelne zúčastňovali aj doktorandi všetkých matematických odbo-

rov z Ústavu matematiky PF UPJŠ, pre ktorých to nezriedka bolo prvé „ostré“ vystúpenie na matematickej konferencii vôbec (a s ktorými bolo a je vždy veselo); tento aspekt konferencie považujem za veľmi užitočný a dúfam, že našich mladých kolegov budeme stretávať na pôde konferencie nielen počas ich štúdií, ale tiež opakovane v budúcnosti.

Podľa môjho názoru najviac pozitívnym prvkom, ktorý sa spája s Konferenciou košických matematikov je fakt, že vytvorila a udržala platformu na ich vzájomné stretnutia a zdieľanie myšlienok a skúseností (a to naprieč jednotlivými zameraniami, odbormi i pracovnými pozíciami). Jednotliví členovia matematickej komunity v meste, kraji či na Slovensku o sebe a o svojej práci (väčšinou) vedia; jednako vnímam (a asi aj mnohí iní), že času a priestoru na hoc' i „singulárne“ stretnutia kolegov súčasných i bývalých (i v rámci mesta) je málo. Preto si veľmi cením, že máme možnosť – aspoň takto raz za rok – „zísť sa a pozdvihnúť hlavu; to stačí“ (hudobná skupina Brontosauři, parafrázované).



Prof. T. Madaras, Konferencia košických matematikov, 2023. (Foto: Peter Mlynárčik.)

Známy Aristotelov výrok (vystupujúci i v „čistej“ matematike, napr. v kontexte superaditívnych mier) hovorí, že celok je viac ako súčet jeho častí; z tohto pohľadu môžeme povedať, že Konferencia košických matematikov je viac, než spojenie tých, ktorí na ňu prichádzajú. Pre ďalšie plodné aplikácie týchto výrokov preto želim do budúcnosti organizátorom konferencie – podľa iného známeho čínskeho výroku – „*nech žije desaťtisíc rokov*“.

Niečo o autorovi:

Informácie o autorovi nájdete v kapitole 2. Významné osobnosti Košickej školy diskkrétnej matematiky na strane 64.

Adresa autora:

Ústav matematiky,  
Prírodovedecká fakulta UPJŠ v Košiciach  
Jesenná 5, 04001 Košice  
e-mail: tomas.madaras@upjs.sk



## 4.4 Moje dojmy a postrehy z konferencie

*Peter Mlynárčik*

Vyštudoval som matematiku (odbor Matematická informatika) na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach v roku 1998. Profesne sa motám vždy na akademickom poli, či už na univerzite alebo strednej škole. Doktorandské štúdium som absolvoval na Matematickom ústave SAV na detašovanom pracovisku v Košiciach pod vedením školiteľky Galiny Jiráskovej. Hlavne som sa venoval nedeterministickej zložitosti v rôznych podtriedach regulárnych jazykov.



Konferencia košických matematikov, 2015. (Zľava: Ján Buša, Janka Andrejková, Peter Mlynárčik.) (Foto: Peter Mlynárčik.)

Hoci sám seba nepovažujem za majstra v matematike, ale vnímam nádheru a dôležitosť matematiky, preto **Konferencia košických matematikov** pre mňa vždy znamenala sviatok, kde je možné stretnúť ľudí, kolegov, ktorí majú matematiku radi a vo väčšine prípadov sa ňou aj profesionálne zaoberajú. Bolo možné stretnúť a vidieť naozaj matematické hviezdy a tešiť sa z toho, že ich môžem vidieť naživo, blízko, ako

sa hovorí „v priamom prenose“. Dobré jedlo, pívko alebo víno otváralo cestu k neformálnym rozhovorom o všeličom a čokoľvek inom, čo utužuje dobré vzťahy a otvára možnosti spolupráce.

Zvyknem so sebou pravidelne vziať Janku Andrejkovú, ktorá síce profesionálne nie je matematicka, ale je jej veľký fanúšik. Janka napriek zrakovému hendikepu je plná životnej energie a má veľký záujem o matematiku. Takže rozhovory s ňou boli a sú vždy vzácne a podnetné. V roku 2018 som sa stretol a zoznámil s Tonom Hovanom, čomu som vďačný, keďže mi Tono už viackrát pomohol s veľkou ochotou a trpezlivosťou z oblasti analýzy a je to človek ako sa hovorí „i do koča i do voza“.

Tiež sa mi podarilo prispieť v roku 2017 príspevkom s názvom *Complement on Free and Ideal Languages*, čomu sa teším, že som mohol prispieť aspoň niečím malým s prelomil bariéru „len“ pasívneho prijímateľa. Avšak väčšinou počúvam a obdivujem príspevky od iných majstrov.



Konferencia košických matematikov, 2023. (Sprava: Peter Mlynárčik, Jan Širůček, Tomáš Madaras, Janka Andrejková, Vít Dutko.) (Foto: Peter Mlynárčik.)

Spomeniem tu len niekoľkých, čo ma najviac oslovili, čím sa dostávam na trochu neistú pôdu, že niekoho opomeniem a vo-

pred sa ospravedlňujem tých čo neuvádzam. Kvôli prehľadnosti uvádzam iba mená a roky: G. Jirásková (2009), J. Krajčiová (2010), R. Jajcay a R. Hajduk (2016), M. Dillingerová, S. Jendroľ, M. Demlová, E. Drabiková, E. Fecková Škrabuľáková, a J. Demel (2018), F. Kuřina, J. Andres, M. Bača, L. Bukovský, J. Molnár a K. Cechlárová (2019).

Na poslednom ročníku pribudla aj nová pekná aktivita vo forme kvízu s možnosťou výhry pekných cien, ktorú pripravili Erika Fecková Škrabuľáková spolu s Adkou Feňovčíkovou. Naše družstvo zvíťazilo a ja som si odniesol domácu slivovicu z Erikinej dielne. Snáď vydrží ešte do budúceho ročníka.

Čo napísať na záver?

Myšlienka organizovať toto podujatie sa ukazuje ako vynikajúca, ktorá pomáha podporovať a motivovať matematickú komunitu v Košiciach a okolí, umožňuje podeliť sa o svoje skúsenosti na neformálnej pôde. A preto chcem vyjadriť vďačnosť všetkým, ktorí založili toto podujatie a tiež všetkým ochotným organizátorom, ktorí pokračujú v tejto tradícii.



Konferencia košických matematikov, 2015. (Zľava: Roman Frič, Štefan Tkačík, Peter Mlynárčik.) (Foto: Peter Mlynárčik.)

Niečo o autorovi:

Doktorát získal z aplikovanej matematiky, presnejšie práca bola v oblasti popisnej zložitosti formálnych systémov na Matematickom ústave SAV, kde pracoval spolu so školiteľkou Galinou Jiráskovou a ďalšími jej doktorandmi. Vystriedal viac pracovných miest v pozícii vysokoškolského (UPJŠ, TUKE, UNIPO, KU RK) alebo stredoškolského (EGJAK, Futurum) učiteľa. Dokonca na krátku chvíľu zastával aj pozíciu učiteľa na ZŠ v Trebišove. Každé miesto mu prinieslo obohatenie a skúsenosť, ktorú sa snaží využívať ďalej. Jeho cesta k matematike začala na gymnáziu, keď sa matematika dotkla jeho srdca a už tam ostala. Vďačí za to hlavne svojmu učiteľovi Jánovi Ivaňákovi a knihám *Jak se jmenuje tahle knížka* a *Rozpravy s geometrií*, ale aj otcovi, ktorý bol veľký fanúšik matematiky, tiež vďaka svojim učiteľom (prof. Jakubík). Matematika sa mu stala cestou ako rozumieť svetu a ako ho spoznávať. Jej jazyk poskytuje prostriedky, ktoré mu veľmi vyhovujú a aj tešia hoci uznáva, že sú aj iné cesty...Potom na UPJŠ mal šťastie stretnúť inšpirujúcich, po všetkých stránkach (nielen matematických), charizmatických učiteľov a tiež spolužiakov. Za všetkých by mohol uviesť doc. Lihovú, doc. Bukovskú, prof. Bukovského, prof. Gefferta, doc. Chvála a spolužiakov Stana Krajčího, Tomáša Madarasa, Henricha Tótha. Mal túžbu stať sa významným matematikom, avšak tento dar akosi nemá, ale má chuť poukázať na krásu matematiky záujemcom alebo študentom. Momentálne pôsobí na Pedagogickej fakulte Katolíckej univerzity v Ružomberku a Matematickom ústave SAV v Košiciach.

Adresa autora:

Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Katolícka univerzita v Ružomberku,  
Hrabovská cesta 1, 034 01 Ružomberok  
e-mail: mlynarcik1972@gmail.com

## 4.5 Konferencia košických matematikov mojimi očami

*Erika Fecková Škrabuláková*

Konferenciu košických matematikov som vždy vnímala ako konferenciu rodinného typu, s príjemnou kamarátskou atmosférou, konferenciu, kde mladý človek má možnosť veľa sa dozvedieť, spoznať nových ľudí, naučiť sa prezentovať výsledky svojej vedeckej práce, a to bez obavy z toho, že nedokonalosť jeho vystúpenia ho privedie do trápnej situácie. Reflektujúc svoju životnú cestu od roku 2007, kedy som ako doktorandka na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach práve na 8. konferencii košických matematikov mala svoje prvé verejné vystúpenie prezentujúc dosiahnuté výsledky na fóliách pomocou meotaru, dnes vidím, že som prešla hodný kus a posunula sa o dosť ďalej. Pamätám si, že som vtedy prednášala o dúhových farbeniach rovinných grafov. Nevhodne som zvolila šírku okrajov fólií, ale najmä farby na ich popis. Usmernenia, ktoré som vtedy dostala od svojho školiteľa, som vnímala ako objektívnu kritiku, dobre miene- né rady môjho akademického otca, ktoré som si vzala k srdcu a publikum, pred ktorým som svoj príspevok predniesla, ako svoju matematickú rodinu, ktorá je zhovievavá voči začiatoč- níckym chybám a skôr povzbudí, než by prehnaným mora- lizovaním riskovala znechutenie a odradenie od ďalšej tvori- vej práce v matematike a pre matematickú komunitu. Moja prednáška o paritných hranových farbeniach rovinných grafov prednesená na 9. ročníku tejto konferencie o rok neskôr už bola aj vďaka tomu lepšia. Medzi rokmi 2009 – 2019 som tu každoročne prezentovala výsledky svojho výskumu v oblasti neopakujúceho sa farbenia grafov, v oblasti 1-planárnych bi- partitných grafov, ale aj v oblasti využitia grafov v economic- kých a technických disciplínach. Keďže svoj príspevok som predniesla aj na ostatnej Konferencii košických matematikov (ktorá sa z pandemických dôvodov konala až v roku 2023), Konferencia košických matematikov sa pre mňa stala jedinou

konferenciou, na ktorej všetkých ročníkoch som sa aktívne zúčastnila nepretržite od r. 2007, pričom v posledných rokoch i v organizátorskej role.

Konferencia košických matematikov mi v úvodných rokoch pomohla nadobudnúť prvé skúsenosti s verejným prezentovaním a s reflexiou na môj výskum. Toto plénum mi bolo veľmi nápomocné pri získaní prehľadu o tom, čím sa zaoberajú iní matematici na východe republiky a aké výsledky vo svojich skúmaných oblastiach dosahujú. Priniesla mi i cenné kontakty – rad potenciálnych spolupracovníkov a v neposlednom rade ma obohatila o skúsenosti organizačného charakteru.

Som rada, že popri matematických témach sa na Konferencii košických matematikov vždy našiel priestor i na nevedecké diskusie, ktoré kolegiálne vzťahy menili na kamarátske a priateľské. Tieto vzťahy sa rozvíjali hlavne počas večerov sprevádzaných hudbou a spevom. Rodinná atmosféra si pritom nevyžadovala externe prizvaných „profesionálov“, ktorí by sa postarali o spev, tanec, či hudobný doprovod. Matematická komunita sa i v dnešnej dobe vie dobre a spontánne zabaviť sama – bez vonkajšieho zdroja, na čo som tak trochu hrdá. Stačí priniesť zopár hudobných inštrumentov a konferenčné spevníky a o večerný program je postarané. Aj toto robí atmosféru konferencie výnimočnou.

Istú mieru unikátnosti dodáva konferencii i prostredie, v ktorom sa od svojich prvopočiatkov koná. Účastníci máloktokej konferencie sa môžu pochváliť zážitkom, ako ich uprostred noci kolegovia budili slovami: „*Vstávajte, už to začína! Podťte na gejzír!*“ Nízkotermálny gejzír<sup>1</sup>, ktorý sa nachádza

<sup>1</sup> Za svoj vznik vďačí vrtu z 19. storočia, ktorý mal zabezpečiť dostatok minerálnej vody do miestnych kúpeľov. Jeho prvá erupcia nastala 16. augusta 1872. V roku 1874 bola dokonca zaznamenaná súvislá erupcia trvajúca po dobu 10 dní, kedy voda striekala do výšky až 112 m. Vrtanie bolo ukončené v roku 1875. Herlianský gejzír je od roku 1987 národná prírodná pamiatka. Erupčné intervaly sa postupne z 8 – 9 hodín koncom 19. storočia predĺžili na súčasných 34 – 36 hodín. V roku 2016 bol zrekonštruovaný, čím sa výška erupcie zvýšila z asi 15 m na 22 m a erupcia trvá približne 25 minút.

v Herľanoch, je totiž unikátny prírodný úkaz aktivovaný ľudskou činnosťou a bola by veľká škoda nechať si ujsť jeho erupciu. Medzi rokmi 1957 a 2006 bol Herľiansky gejzír jediným<sup>2</sup> studenovodným gejzírom v Európe.

Vďaka plodným myšlienkam matematického charakteru Konferencia košických matematikov tiež prispela svojou troškou k rozvoju košickej matematickej školy v zmysle schémy: Vypočujem si prednášku. Zaujme ma. Oslovím prednášajúceho pre budúcu spoluprácu, ktorú následne po konferencii rozvíjam. Navyše tým, že Konferencia košických matematikov je dedikovaná matematikom na všetkých typoch a stupňoch škôl, umožnila medzi nimi bohaté diskusie didaktického charakteru a hľadanie a nachádzanie riešení viacerých problémov.



Konferencia košických matematikov, prednáša Erika Fecková Škrabuľáková, 2023. (Zdroj: Peter Mlynárčik.)

<sup>2</sup> Druhý gejzír takéhoto typu v Európe bol navŕtaný v roku 1903 a nachádza sa v Nemecku pri meste Andernach. Do roku 1957 bol využívaný komerčne na dopĺňanie CO<sub>2</sub> do minerálnej vody. Od roku 2006 je to turistická atrakcia v prírodnej rezervácii s regulovaným prístupom vďaka výške erupcií 30-60 m zapísaná do Guinnessovej knihy rekordov. Medzi rokmi 1957 – 2006 bol však andernachský gejzír zapečatený.

Bola by som rada, ak by sa odkaz konferencie opieral o motto: „*Tvárou v tvár*“, a aby jej tradícia pretrvala naprieč generáciami akademických rodičov a ich detí, ktoré práve tu tvárou v tvár čelia prvému vystúpeniu pred širšou matematickou komunitou, tvárou v tvár sa učia správne formulovať otázky i odpovedať na tie im položené, tvárou v tvár získavajú prvé vlastné kontakty a potom tvárou v tvár si ich obnovujú počas nasledujúcich matematicky plodných rokov na pôde Konferencie košických matematikov. Preto je mojím želaním, aby sa toto podujatie zachovalo v podobe, v akej sa koná v súčasnosti, a aby sa i napriek dnešnej digitálnej dobe nepresunulo do online priestoru.

Niečo o autorke:

Informácie o autorke nájdete v kapitole 2. Významné osobnosti Košickej školy diskkrétnej matematiky na strane 78.

Adresa autorky:

Ústav riadenia a informatizácie výrobných procesov Fakulty baníctva, ekológie, riadenia a geotechnológií Technickej univerzity v Košiciach,  
Němcovej 3, 042 00 Košice  
e-mail: [erika.feckova.skrabulakova@tuke.sk](mailto:erika.feckova.skrabulakova@tuke.sk)



---

## NAJÚSPEŠNEJŠIA PROBLEMATIKA RIEŠENÁ KOŠICKOU ŠKOLOU DISKRÉTNEJ MATEMATIKY

---

*Stanislav Jendroľ, Tomáš Madaras, Gabriel Semanišin*

### 5.1 Úvod

Kvôli porozumeniu nasledujúceho textu je potrebné uviesť základné a často používané pojmy a označenia, s ktorými pracuje súčasná diskretná matematika v oblastiach ako je teória grafov, kombinatorická teória máp na plochách a kombinatorická teória konvexných mnohostenov. Tieto sú nevyhnutné k aspoň intuitívnemu porozumeniu obsahu tejto časti publikácie.

Začnime pojmom *kocka*. Je to trojrozmerný objekt ohraničený šiestimi zhodnými štvorcami, ktorý má dvanásť *hrán* a osem rohov. Štvorcom hovoríme *steny*, rohy nazývame *vrcholy*. V každom vrchole sa stretávajú tri hrany a tri steny, každá hrana spája dva rôzne vrcholy a je spoločná práve dvom stenám. Kocka má ešte nasledujúcu vlastnosť (konvexnosť): ak spojíme úsečkou ľubovoľné dva jej rôzne body (či už z povrchu alebo z vnútra, alebo kombinovane), tak úsečka, ktorá ich spája vždy bude celá obsiahnutá v kocke. Túto vlastnosť majú kocky rôznych veľkostí a je zachovaná aj pre telesá, ktoré vzniknú z kocky malou zmenou polohy jej vrcholov (steny takéhoto telesa už nemusia byť štvorce, ale iné rovinné štvoruholníky). Navyše možno povedať, že mnohé ďalšie telesá – kvádre, rovnobežnosteny či zrezané štvorboké ihlany – sú

vzdialene podobné kocke v zmysle, že z nich možno vhodnou spojitou deformáciou (ktorá zachováva počet vrcholov, hrán a stien a vzťahy ich vzájomnej susednosti) kocku získať; hovoríme, že všetky tieto telesá majú rovnaký typ.

Intuitívne definujeme **konvexný mnohosten** ako konvexný trojrozmerný útvar ohraničený rovinnými stenami (mnohouholníkmi), ktorých hrany sú úsečky, pričom každá hrana je spoločná práve dvom stenám a spája práve dva vrcholy; v každom vrchole sa stretávajú aspoň tri hrany.

Mnohouholník (stena), ktorý je ohraničený k hranami sa nazýva *k-uholník*. Číslo *k* sa tiež volá stupeň steny. Vrchol, v ktorom sa stretáva *k* hrán, sa nazýva *k-vrchol*; v tomto prípade číslo *k* nazývame takisto **stupeň vrchola**.

Vrcholy a hrany mnohostena vytvárajú kombinatorickú štruktúru, ktorú nazývame **graf mnohostena**.

Pojem grafu mnohostena môžeme zovšeobecniť (abstrahujúc od geometrickej štruktúry jemu prislúchajúceho telesa) nasledovne: Nech  $V$  je konečná množina prvkov (nazývame ich vrcholy) a nech  $E$  je podmnožina množiny  $P_2(V)$  všetkých dvojprvkových podmnožín množiny  $V$ ; jej prvky nazývame hrany. Usporiadanú dvojicu množín  $G = (V, E)$  nazývame (jednoduchý) **graf**. Graf  $H$  je **podgrafom** grafu  $G$ , ak je jeho množina vrcholov, resp. hrán je podmnožinou množiny  $V$ , resp.  $E$ . Graf  $H$  je **indukovaným podgrafom** grafu  $G$  na podmnožine  $W \subseteq V$  vrcholov grafu  $G$ , ak  $W = V(H)$  a  $E(H) = E(G) \cap P_2(W)$ .

Ak hrana  $e = u, v = uv$  je tvorená vrcholmi  $u, v$ , tak hovoríme, že vrcholy  $u$  a  $v$  sú **susedné**, a že sú *konce hrany*  $e$ ; tiež hovoríme, že vrchol  $u$  (resp.  $v$ ) a hrana  $e$  **incidujú**. Ak dve rôzne hrany incidujú s tým istým vrcholom, tak hovoríme, že sú **susedné**. **Stupeň vrchola**  $u$  v grafe  $G$  je rovný počtu hrán, ktoré incidujú s  $u$ . Pod **váhou**  $w(H)$  **podgrafu**  $H$  **v grafe**  $G$  rozumieme súčet stupňov vrcholov grafu  $H$  v grafe  $G$ .

Postupnosť navzájom rôznych vrcholov  $x_1, \dots, x_n$  je **cestou** v grafe  $G$ , ak dvojica  $x_i x_{i+1}$  je hranou z  $E$  pre každé  $i = 1, \dots, n - 1$ . Postupnosť navzájom rôznych vrcholov

$x_1, \dots, x_n$  je **kružnica** dĺžky  $n$  v grafe  $G$ , ak dvojica  $x_i x_{i+1}$  je hranou z  $E$  pre každé  $i = 1, \dots, n-1$  a aj dvojica  $x_n x_1$  patrí do  $E$ . Cesta, resp. kružnica na  $k$  vrcholoch sa volá  **$k$ -cesta** resp.  **$k$ -kružnica**. Kružnica sa nazýva **hamiltonovská**, ak prechádza všetkými vrcholmi grafu, t.j. ak jej dĺžka je rovná počtu vrcholov grafu.

Graf  $G$  je **súvislý**, ak medzi každou dvojicou jeho vrcholov existuje cesta. Graf  $G$  je  **$r$ -súvislý**, ak ostáva súvislým po odstránení ľubovoľných  $r-1$  vrcholov; to je ekvivalentné s tvrdením (Mengerova veta), že medzi každou dvojicou jeho vrcholov  $u, v$  existuje  $r$  vzájomne vnútorne vrcholovo disjunktných ciest (t.j. ich spoločné vrcholy sú len  $u, v$ ).

**Guľová plocha** (alebo **orientovateľná plocha rodu 0**) je množina všetkých bodov v (trojrozmernom) priestore, ktoré majú od daného pevného bodu konštantnú kladnú vzdialenosť. Príkladom **toroidálnej plochy (orientovateľnej plochy rodu 1)** je pneumatika (čiže rotačná plocha vytvorená rotáciou kružnice okolo osi ležiacej mimo nej). Dá sa tiež získať z guľovej plochy tak, že sa do guľovej plochy vyrežú dva kruhové otvory a následne sa spoja zakrivenou valcovou plochou (rúčkou) s dvomi kruhovými otvormi tak, aby stotožnením dvojíc otvorov oboch plôch vznikla jedna nová „hladká kompaktná“ plocha. **Orientovateľná plocha rodu  $g$**  sa dá podobne získať pridaním  $g$  rúčok vyššie opísaným spôsobom ku guľovej ploche. Detailnejšie o plochách z kombinatorického pohľadu sa možno dozvedieť z monografie [G. Ringel, *Map color theorem*, Springer-Verlag, Berlin 1974].

Pod **nakreslením** grafu  $G$  na plochu rozumieme priradenie rôznym vrcholom grafu rôznych bodov plochy a hranám  $xy$  oblúkov spájajúce odpovedajúce body  $x$  a  $y$  plochy tak, aby žiaden oblúk odpovedajúci hrane sám seba nepretínal, a aby neobsahoval žiaden bod odpovedajúci vrcholu grafu ako vnútorný bod. Ďalej požadujeme, aby každé dva oblúky odpovedajúce dvom rôznym hranám sa pretli v maximálne jednom spoločnom bode. Také nakreslenie grafu na plochu, v ktorom žiadne dva oblúky odpovedajúce hranám grafu nemajú spoločný vnútorný bod, nazývame **vnorenie** grafu  $G$  do plochy.

Ak odstránime z plochy body odpovedajúce vrcholom a hranám vnoreného grafu, plocha sa rozpadne na oblasti, ktoré nazývame **steny vnorenia**. Ak každá stena vnorenia je homeomorfná otvorenému kruhu (t.j. dá sa spojitou deformovať do jediného bodu), tak vnorenie sa nazýva bunkové vnorenie; takto vnorený graf sa nazýva **mapa**. Ak graf  $G$  má vnorenie do roviny (a teda aj do guľovej plochy), tak sa nazýva **planárny graf**. Vnorený planárny graf do roviny sa volá **rovinný graf**. Ak vrchol (resp. hrana) vnoreného grafu leží na (topologickej) hranici steny, tak hovoríme, že vrchol (resp. hrana) **incидуje so stenou**.

Je známe (Steinitzova veta z r. 1922), že graf  $G$  je grafom konvexného mnohostena práve vtedy, keď je **planárny** a **3-súvislý**. Ak graf mapy je 3-súvislý, tak mapa sa nazýva **polyedrálna mapa**.

## 5.2 Stenové a vrcholové vektory konvexných mnohostenov

Najúspešnejšou problematikou riešenou počas počiatočných rokov školy bola istá skupina otvorených otázok a hypotéz, ktorá sa týkala stenových a vrcholových vektorov konvexných trojrozmerných mnohostenov a ich analógií na plochách rôznych od guľovej plochy. Išlo o nasledujúci problém:

Každému konvexnému mnohostenu  $P$  je možné priradiť dve postupnosti: stenový vektor  $(p_3(P), p_4(P), \dots)$  a vrcholový vektor  $(v_3(P), v_4(P), \dots)$ , kde  $p_i(P)$ , resp.  $v_i(P)$  označuje počet  $i$ -uholníkov stien mnohostena  $P$ , resp. počet jeho vrcholov stupňa  $i$ .

Úlohou bolo popísať vlastnosti, ktoré majú mať postupnosti  $p = (p_3, p_4, \dots)$  a  $v = (v_3, v_4, \dots)$  nezáporných celých čísel, pre ktoré existuje konvexný mnohosten  $P$  taký, že  $p_i = p_i(P)$ , resp.  $v_i = v_i(P)$ , pre každé  $i \geq 3$ . Ak taký mnohosten existuje, tak dvojica postupností  $p$  a  $v$  sa volá *realizovateľná*.

Prvú prácu o tejto úlohe uverejnil v roku 1891 nevidiaci nemecký geometer V. Eberhard. Týkala sa kubických mnohostenov. Jej dôkaz zaberá takmer polovicu 300-stránkovej knihy, ktorú V. Eberhard o konvexných mnohostenoch napísal. B. Grünbaumovi sa podarilo nájsť omnoho kratší dôkaz tejto vety, ktorý sa už nachádza v jeho knihe [*Convex Polytopes*, **John Wiley & Sons, Ltd. 1967**]. V tejto knihe a v niekoľkých nasledujúcich článkoch sa venoval danej úlohe, pričom sformuloval niekoľko otvorených problémov a hypotéz. Nám sa jednu z nich podarilo vyvrátiť a jeho problém zodpovedať v úplnosti (v [S. Jendroľ, E. Jucovič, *On a conjecture of B. Grünbaum*, **Discrete Mat.**, **2 (1972)**, **35 – 49**]). Motivovaní Grünbaumovými problémami a jeho knihou, S. Jendroľ, E. Jucovič a M. Trenkler získali a publikovali (zväčša v kvalitných zahraničných časopisoch) celý rad pekných výsledkov týkajúcich sa realizovateľnosti postupností ako stenových vektorov 3-regulárnych, 4-regulárnych, 5-regulárnych, (3,4)-regulárnych, (3,5)-regulárnych a autoduálnych konvexných trojrozmerných mnohostenov. Všetky tieto výsledky tvoria časť obsahu Jucovičovej monografie [*Konvexné mnohosteny*, **Veda, Bratislava 1981**].

Doteraz neprekonané výsledky o realizovateľnosti dvojíc postupností  $p$  a  $v$  sa podarili E. Jucovičovi a S. Jendroľovi. Zo slávneho Eulerovho vzorca (objaveného v r. 1752)

$$s + v - h = 2$$

kde  $s$  znamená počet stien daného mnohostena,  $v$  počet jeho vrcholov a  $h$  počet jeho hrán, sa dajú odvodiť dve nezávislé nutné podmienky

$$\begin{aligned} A(4) &: \sum_{k \geq 3} (4 - k)p_k + \sum_{k \geq 3} (4 - k)v_k = 8 \text{ a} \\ A(6) &: \sum_{k \geq 3} (6 - k)p_k + \sum_{k \geq 3} (6 - 2k)v_k = 12, \end{aligned}$$

pre vzájomné vzťahy členov postupností  $p$  a  $v$ . Podmienka  $A(4)$  však nedáva žiadnu informáciu o parametroch  $p_4$  a  $v_4$ ,

druhá podmienka  $A(6)$ , nedáva žiadnu informáciu o parametroch  $p_6$  a  $v_3$ . Tretia nezávislá nutná podmienka

$$B : \sum_{k \geq 3} kp_k = \sum_{k \geq 3} kv_k = 2h,$$

nezávisiaca od Eulerovho vzorca však dáva vzájomnú informáciu o všetkých zložkách  $p$  a  $v$ . Preto nech  $R(4, p, v)$ , resp.  $R(6, p, v)$  je množina všetkých možných hodnôt  $p_4$ , resp.  $p_6$ , s ktorými sú postupnosti  $p$  a  $v$  splňajúce  $A(4)$  a  $B$ , resp.  $A(6)$  a  $B$  realizovateľné.

Jucovič ukázal, že množina  $R(4, p, v)$  obsahuje všetky nezáporné celé čísla väčšie ako nejaká konštanta ([E. Jucovič, *On face-vectors and vertex-vectors of cell-decompositions of orientable-manifolds*, **Math. Nachr.** **73** (1976) 285 – 295]).

V práci [S. Jendroľ, *On face vectors and vertex vectors of convex polyhedra*, **Discrete Math.** **118** (1993) 119 – 144] bolo ukázané, že situácia v prípade množín  $R(6, p, v)$  je omnoho zložitejšia. Všetky množiny  $R(6, p, v)$  je možné vzhľadom na dvojice  $p, v$  rozdeliť do štyroch dobre charakterizovaných skupín. Pre niektoré dvojice  $p, v$  je množina  $R(6, p, v)$  prázdna, pre iné dvojice  $p, v$  množina  $R(6, p, v)$  obsahuje, počnúc nejakou konštantou, všetky párne čísla a žiadne nepárne číslo, pre ďalšie dvojice  $p, v$  množina  $R(6, p, v)$  obsahuje, počnúc nejakou konštantou, všetky nepárne čísla a žiadne párne číslo, a pre všetky ostatné dvojice  $p, v$  množina  $R(6, p, v)$  obsahuje, počnúc nejakou konštantou, všetky nezáporné celé čísla.

E. Jucovič vo vyššie spomínanej práci a S. Jendroľ v inom, neskôr publikovanom článku [S. Jendroľ, *On face-vectors and vertex-vectors of polyhedral maps on orientable 2-manifolds*, **Math. Slovaca** **43** (1993) 393 – 416] ukázali, že pre polyedrálne mapy na orientovateľných plochách rôznych od guľovej a toroidálnej plochy príslušné množiny ku  $R(4, p, v)$ , resp.  $R(6, p, v)$  obsahujú, počnúc nejakou konštantou všetky nezáporné celé čísla. Príslušné množiny  $R(4, p, v)$ , resp.  $R(6, p, v)$  ku polyedrálным toroidálnym mapám sa správajú analogicky ako tie pre konvexné mnohosteny.

Analogické výsledky pre neorientovateľné plochy sú doteraz nespracované.

O kvalite spomínaných výsledkov svedčí okrem iného aj skutočnosť, že sa o nich dostali zmienky aj v monografických dielach [*Handbook of graph theory*, **CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2014**, 820 – 859 (R. Nedela, M. Škovierra, *Topological Graph Theory*)], [*Handbook of discrete and computational geometry*, **CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 1997**, 331 – 344 (kapitoly G. Kalai, *Polytope skeletons and paths* a U. Brehm, E. Schulte, *Polyhedral Maps*)]. V monografii [P. M. Gruber, J. M. Wills, *Handbook of convex geometry*, **North Holland, 1993**] v kapitole 2.3 Combinatorial aspects of convex polytopes je našej práci venovaná celá jedna sekcia. V druhom rozšírenom vydaní monografie [B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, **Springer-Verlag, New York 2003**] sú tieto výsledky tiež citované.

### 5.3 Autoduálne mnohosteny

Dva mnohosteny  $P_1$  a  $P_2$  sú navzájom duálne, ak existuje bijekcia  $\delta$  zobrazujúca vrcholy  $P_1$  do stien  $P_2$  a steny  $P_1$  do vrcholov  $P_2$  tak, že zachováva incidencie vrchol/stena i stena/vrchol. Ak  $P_1 = P_2 = P$ , daná bijekcia sa nazýva autoduálna a mnohosten  $P$  sa volá autoduálny. Ak existuje dualita  $\delta$  z mnohostena  $P$  do neho samotného, tak  $P$  sa volá autoduálny; v tomto prípade je  $\delta$  je špecifická permutácia na množine vrcholov a stien  $P$ . Hodnosť autoduality  $\delta$  je definovaná ako najmenšie kladné číslo  $r(\delta) = n$ , pre ktoré  $\delta^n$  je identita; hodnosť autoduálneho mnohostena  $P$  je  $r(P) = r(\delta^*)$ , kde  $r(\delta^*)$  je minimálne  $r(\delta)$  spomedzi všetkých autodualít  $\delta$  mnohostena  $P$ .

Grünbaum a Shephard položili v [*Is selfduality involutory?*, **Amer. Math. Monthly** **95** (1988) 729 – 733] otázku, či každý autoduálny mnohosten má hodnosť 2. Nám sa podarilo dať na danú otázku negatívnu odpoveď v [S. Jendroľ, *A non-involutory selfduality*, **Discrete Math.** **74** (1989) 325 – 326]. Skonštruovali sme príklad autoduálneho mnohostena, ktorý má hodnosť 4, a ktorý bol v práci [A. Ashley, B. Grünbaum,

G. C. Shephard, W. Stromquist, *Self-duality groups and ranks of self-dualities*, in **The Victor Klee festschrift, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol. 4, 1991**] nazvaný **Jendroľov mnohosten**. Je to prvý známy príklad mnohostena s touto vlastnosťou.

S. Jendroľ v práci [*On symmetry groups of selfdual polyhedra, Ann. Discrete Math. 134 (1994) 139 – 150*] neskôr popísal všetky grupy symetrií, ktoré môžu mať trojrozmerné autoduálne mnohosteny. Tento fakt je citovaný vo vyššie spomínanom druhom vydaní Grünbaumovej monografie *Convex Polytopes*.

## 5.4 Ľahké hrany

Ďalšou veľmi úspešnou problematikou, ktorú Košická diskrétno-matematická skupina študovala, bola teória ľahkých podgrafov. Počiatočným impulzom tohto štúdia bolo tvrdenie dokázané slovenským matematikom A. Kotzigom, že každý konvexný mnohosten obsahuje hranu, ktorej koncové vrcholy majú súčet stupňov najviac 13; navyac hranica 13 je vo všeobecnosti nezmenšiteľná. Taká hrana sa volá **ľahká hrana** a súčet stupňov jej koncových vrcholov sa nazýva **váha hrany**.

Kotzig tento výsledok publikoval v slovenskom jazyku a v slovenskom časopise (viď [A. Kotzig, *Príspevok k teórii eulerovských polyedrov, Mat.-fyz. čas. 5 (1955), 101 – 113*]). Tento pekný výsledok sa nedostal do Grünbaumovej monografie. Keď sa ho Grünbaum dozvedel, začal ho popularizovať na Západe. Výsledok sa v tom čase zapáčil geniálnemu matematikovi P. Erdősovi, ktorý vyslovil domnienku, že tvrdenie platí aj pre širšiu triedu planárnych grafov s minimálnym stupňom aspoň 3. Túto hypotézu sa podarilo dokázať Američanovi D. Barnetteovi a nezávisle Rusovi O. V. Borodinovi v r. 1989.

V Košiciach začal túto problematiku študovať prof. Jucovič. Ako prvý sa pokúsil ukázať, že takýchto hrán v konvexných



mnohostenoch môže byť veľa. Kvôli upresneniu možnosti pre váhu ľahkej hrany zavedme nasledujúce označenie: nech  $e = xy$  je hrana s koncovými vrcholmi  $x$  a  $y$ . Ak  $x$  je  $i$ -vrchol a  $y$  je  $j$ -vrchol, tak hrana  $e$  sa tiež nazýva  $(i, j)$ -hrana (pozn. budeme tiež uvažovať  $(i, j^-)$ -hrany resp.  $(i^-, j^-)$ -hrany, kde  $y$ , resp.  $x$  je vrchol stupňa najviac  $j$ , resp.  $i$ ). Jucovič dokázal nerovnosť typu  $\sum_{i+j \leq 13} a_{i,j} e_{i,j} \geq 120$ , kde  $e_{i,j}$  znamená počet  $(i, j)$ -hrán. I. Fabrici a S. Jendroľ našli analogickú nerovnosť, v ktorej koeficienty  $a_{i,j}$  sú vo všeobecnosti nezmenšiteľné, viď [I. Fabrici, S. Jendroľ, *An inequality concerning edges of minor weight in convex 3-polytopes*, **Discuss. Math. Graph Theory** **16** (1996) **81 – 87**]. Z ich tvrdenie bezprostredne vyplýva nasledujúci fakt známy skôr aj Borodinovi: Každý konvexný mnohosten obsahuje  $(3, 10^-)$ -hranu,  $(4, 7^-)$ -hranu alebo  $(5, 6^-)$ -hranu. Hranice 10,7 a 6 sú vo všeobecnosti najlepšie možné.

Ivančovi sa podarilo dokázať nasledujúcu analógiu Kotzigovej vety pre polyedrálne mapy:

ak  $G$  je polyedrálne mapa na orientovateľnej ploche rodu  $g$ , tak  $G$  obsahuje hranu  $e$  takú, že pre jej váhu platí  $w(e) \leq 2g + 13$  ak  $0 \leq g \leq 3$  a  $w(e) \leq 4g + 7$ , ak  $g \geq 3$ , pričom obe hranice sú tesné,

viď [J. Ivančo, *The weight of a graph*, **Ann. Discrete Math.** **51** (1992) **113 – 116**]. Neskôr S. Jendroľ, M. Tuhársky a H. J. Voss ukázali, že ak polyedrálne mapa  $G$  má dostatočne veľa vrcholov, tak  $G$  obsahuje  $(3, 12^-)$ -hranu alebo  $(4, 8^-)$ -hranu, alebo  $(6^-, 6^-)$ -hranu. Hranice 12,8 a 6 sú tesné, viď [S. Jendroľ, M. Tuhársky, H.-J. Voss, *A Kotzig type theorem for large maps on surfaces*, **Tatra Mt. Math. Publ.** **27** (2003), **153 – 162**].

Neskôr S. Jendroľ a M. Tuhársky dokázali analógiu Ivančovej vety aj pre neorientovateľné plochy.

## 5.5 Ľahké cesty

Z Eulerovho vzorca je ľahké odvodiť, že každý konvexný mnohosten má vrchol stupňa najviac 5. Z Kotzigovej vety ako dôsledok vyplýva, že každý konvexný mnohosten obsahuje cestu na dvoch vrcholoch, z ktorých každý má stupeň najviac 10. I. Fabrici a S. Jendroľ dokázali nasledovné tvrdenie zovšeobecňujúce obidva predošlé výsledky:

ak konvexný mnohosten (presnejšie, jeho graf) obsahuje  $k$ -cestu ako podgraf, tak obsahuje aj takú  $k$ -cestu, že každý jej vrchol má stupeň najviac  $5k$ . Hranica  $5k$  je tesná.

Zároveň ukázali, že žiaden iný súvislý podgraf takúto vlastnosť vo všeobecnosti nemá, viď [I. Fabrici, S. Jendroľ, *Subgraphs with restricted degrees of their vertices in planar 3-connected graphs*, **Graphs Combin.** 13 (1997) 245 – 250].

Tento výsledok sa dá zlepšiť, ak sa pozrieme na váhy ciest. B. Mohar [*Light paths in 4-connected graphs in the plane and other surfaces*, **J. Graph Theory** 34 (2000), 170 – 179] dokázal, že ak graf konvexného mnohostena je 4-súvislý a obsahuje  $k$ -cestu, tak obsahuje aj takú cestu  $Q$  na  $k$  vrcholoch, že jej váha  $w(Q)$  je najviac  $6k - 1$ . Navyše platí, že hranica  $6k - 1$  je tesná. B. Mohar tiež skonštruoval nekonečnú sériu 3-súvislých rovinných grafov, v ktorých každá  $k$ -vrcholová cesta má váhu aspoň  $\frac{9}{16}k \log_2 k$ .

I. Fabrici, J. Harant a S. Jendroľ dokázali v [*Paths of low weight in planar graphs*, **Discuss. Math. Graph Theory** 28 (2008), 121 – 135], že každý 3-súvislý planárny graf obsahujúci cestu na  $k$  vrcholoch obsahuje aj  $k$ -cestu  $Q$  váhy  $w(Q) \leq \frac{3}{2}k^2 + O(k)$ . Tiež ukázali, že každý konvexný mnohosten obsahujúci  $k$ -cestu a pozostávajúci len z 3-stien obsahuje aj  $k$ -cestu  $Q$ , ktorej váha splňa  $w(Q) \leq k^2 + 13k$ .

Aj práca [*On weights of induced paths and cycles in claw-free and  $K_{1,r}$ -free graphs*, **J. Graph Theory** 36 (2001), 131 – 143] od autorov J. Harant, M. Voigt, S. Jendroľ, B. Randerath, Z. Ryjáček a I. Schiermeyer bola motivovaná našimi výsledkami

o ľahkých cestách v rovinných grafoch a Ryjáčkovými výsledkami o grafoch bez indukovaného podgrafu  $K_{1,3}$ .

Ukazuje sa, že problém ľahkých ciest je zaujímavý aj pre všeobecné súvislé grafy. Prvé kroky v tomto smere vôbec boli vykonané v práci [J. Harant, S. Jendroľ, *Lightweight paths in graphs*, **Opuscula Math.** 39 (2019), 829 – 837].

Ak sa sústreďíme na skúmanie vrcholovej štruktúry krátkych ľahkých ciest v rovinných grafoch, môžeme dostať ďalšie zaujímavé poznatky. Formálne ich možno opísať pomocou typov ciest:  $k$ -vrcholová cesta  $v_1, v_2, \dots, v_k$  v grafe  $G$  sa nazýva  $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ -cesta, ak stupeň vrchola  $v_i$  v grafe  $G$  je  $d_i$  (ako sme už spomenuli pri ľahkých hranách, aj pri typoch ciest pripúšťame označenie  $d_i^-$  v prípade, že príslušný stupeň nie je väčší ako  $d_i$ ). Situácie pre ľahké 2-cesty (a teda ľahké hrany) je popísaná vyššie. Prácou [S. Jendroľ, *A structural property of convex 3-polytopes*, **Geometriae Dedicata** 68 (1997) 91 – 99] sme naštartovali štúdium ľahkých 3-ciest v 3-súvislých rovinných grafoch. Ukázali sme, že každý graf z tejto množiny obsahuje ľahkú cestu, ktorá je jedného z desiatich rôznych typov. Práca zaujala najmä ruských matematikov z Novosibirska vedených O. V. Borodinom, ktorí okamžite rozbehli intenzívny výskum v tomto smere a vylepšili náš výsledok pre viaceré podmnožiny rovinných 3-súvislých grafov. Na túto našu prácu sme zaznamenali 22 citácií.

Párny graf  $K_{r,2}$  pre  $r \geq 2$  neobsahuje vo všeobecnosti ľahkú hranu (s pevným konštantným horným ohraničením jej váhy), lebo všetky jeho hrany majú váhu  $r + 2$  a  $r$  môže byť ľubovoľne veľké. Keďže tento graf je 2-súvislý, dostávame, že existenciu ľahkej hrany nemožno v 2-súvislých rovinných grafoch vo všeobecnosti zaručiť. Ak sa však obmedzíme na také 2-súvislé rovinné grafy, v ktorých dĺžka najkratšej kružnice je aspoň 5, tak dostávame zaujímavé výsledky. S. Jendroľ sa spolu so svojou doktorandkou M. Macekovou a neskôr aj s ďalšími spoluautormi vrátili k štúdiu ľahkých 3-ciest v tejto triede grafov. V práci [S. Jendroľ, M. Maceková, *Describing short paths in plane graphs of girth at least 5*, **Discrete Math.** 338 (2015), 149 – 158] sme pre každé  $g \geq 5$  charakteri-

zovali všetky typy nevyhnutných 3-ciest v 2-súvislých rovinných grafoch, ktorých najkratšie kružnice majú dĺžky aspoň  $g$ . V [S. Jendroľ, M. Maceková, R. Soták, *Note on 3-paths in plane graphs of girth 4*, **Discrete Math.** **338** (2015), 1643 – 1648] sme doplnili vyššie spomínané výsledky aj pre 3-cesty v 2-súvislých rovinných grafoch s najkratšími kružnicami dĺžky aspoň 4. V [S. Jendroľ, M. Maceková, M. Montassier, R. Soták, *Optimal unavoidable sets of types of 3-paths for planar graphs of given girth*, **Discrete Math.** **339** (2016), 780 – 789] sme opísali optimálne množiny typov 3-ciest pre triedy 2-súvislých grafov s dĺžkami najkratších kružníc aspoň 5; navyiac sme ukázali, že pre tú istú triedu grafov s vymedzeným obvodom môže existovať viacero rôznych množín optimálnych nevyhnutných typov 3-ciest. Aj tieto tri práce našli rýchlu odozvu v prácach spomínanej ruskej skupiny matematikov okolo O. V. Borodina. Na prvú z nich sme zaznamenali (podľa databázy Scopus) 24 citácií, na druhú 15 a na tretiu 9.

V práci [S. Jendroľ, M. Maceková, M. Montassier, R. Soták, *3-paths in graphs with bounded average degree*, **Discuss. Math. Graph Theory** **36** (2016), 339 – 353] sú študované vlastnosti 3-ciest vo všeobecných grafoch, ktoré majú pevne zhora ohraničený maximálny priemerný stupeň vrcholov v ich podgrafoch (nie sú teda viazané na vnorenia do plôch). Aj na ňu máme 9 citácií.

## 5.6 Súvislé ľahké podgrafy rôzne od ciest

Jedným z krásnych výsledkov, ktoré boli motivované Kotzigovou vetou o ľahkej hrane, je nasledujúce tvrdenie:

Každý 3-súvislý planárny graf  $G$  na aspoň  $k$  vrcholoch obsahuje súvislý  $k$ -vrcholový podgraf  $H$  s váhou  $w(H) \leq 8k - 1$ ;

je to výsledok práce [H. Enomoto, K. Ota, *Connected subgraphs with small degree sum in 3-connected planar graphs*, **J. Graph**

**Theory 30 (1999), 191 – 203**]. Toto tvrdenie takisto poukazuje na všeobecnú tendenciu pozorovateľnú v rovinných grafoch, resp. grafoch konvexných mnohostenov: vrcholy či steny (relatívne) malých stupňov majú tendencie zhlukovať sa do určitých klastrov. Príklad takýchto klastrov –  $k$ -cesty s vrcholmi stupňov najviac  $5k$  – sme už spomenuli v predchádzajúcej časti; predchádzajúce výsledky I. Fabriciho a S. Jendroľa navyše ukazujú, že v 3-súvislých planárnych grafoch takéto klastre môžu byť dosť „chudobné“ (t.j. tvorené len cestami, resp. lineárnymi reťazcami stien malých stupňov). Na druhej strane, netriviálne klastre prvkov malých stupňov možno nájsť v rovinných grafoch, ktoré spĺňajú dodatočné „genericke“ podmienky.

Historicky prvou podmienkou tohto druhu je požiadavka dostatočného minimálneho stupňa vrcholov. Už v roku 1940 Lebesgue dokázal, že každý konvexný mnohosten minimálneho vrcholového stupňa 5 obsahuje 3-stenu  $f$ , ktorej váha  $w(f)$  je najviac 19. Nevediac o tomto výsledku, Kotzig v roku 1963 vylepšil túto hranicu na 18. Grünbaum vyslovil domnienku, že tesná hranica pre váhu takejto steny  $f$  je 17. Túto domnienku dokázal O. V. Borodin v práci [*Solution of problems of Kotzig and Grünbaum concerning the isolation of cycles in planar graphs*, **Math Notes** **46 (1989), 835 – 837**]. V práci [S. Jendroľ, T. Madaras, *On light subgraphs in plane graphs of minimum degree five*, **Discussiones Mathematicae Graph Theory** **16(2) (1996), 207 – 217**] bolo tiež ukázané, že v každom rovinnom grafe minimálneho stupňa 5 existuje tiež 3-hviezda  $S_3 = K_{1,3}$ , pre ktorú  $w(S_3) \leq 23$  (hranica 23 je najlepšia možná). Z uvedenej práce i z prác [S. Jendroľ, T. Madaras, R. Soták, Z. Tuza, *On light cycles in plane triangulations*, **Discrete Math.** **197/198 (1999), 453 – 467**] a [T. Madaras, R. Soták, *The 10-cycle is light in the family of all plane triangulations with minimum degree five*, **Tatra Mt. Math. Publ.** **18 (1999), 35 – 56**] ďalej vyplýva, že v rovinnnej triangulácii minimálneho stupňa 5 existuje  $r$ -kružnica s pevne zhora ohraničenou váhou práve vtedy, keď  $3 \leq r \leq 10$ . Ak rovinný graf min. stupňa 5 nie je trianguláciou, podobné výsledky sú známe

len pre kružnice dĺžky najviac 7, pozri [T. Madaras, R. Škrekovski, H.-J. Voss, *The 7-cycle  $C_7$  is light in the family of planar graphs with minimum degree 5*, **Discrete Mathematics** **307** (11 – 12) (2007), 1430 – 1435]. Charakterizácia podgrafov, pre ktoré platia analogické pozitívne výsledky, je v tomto prípade (na rozdiel od grafov konvexných mnohostenov vo všeobecnosti, resp. polyedrálnych grafov minimálneho stupňa aspoň 4) otvorená; z výsledkov I. Fabriciho, S. Jendroľa, T. Madarasa, R. Sotáka, Z. Tuzu a P. J. Owensa vyplýva, že žiaden planárny graf  $H$  maximálneho stupňa aspoň 5 alebo majúci blok na aspoň 11 vrcholoch nie je ľahký ani v množine všetkých 3-súvislých grafov minimálneho stupňa 5.

Podobný efekt (pre existenciu netriviálnych podgrafov malej váhy) ako podmienka minimálneho vrcholového stupňa 5 má i podmienka dostatočnej minimálnej veľkosti stien rovinného grafu – Lebesgue (popri horeuvedenom výsledku) dokázal, že v každom konvexnom mnohostene, ktorý má steny stupňov aspoň 5, vždy existuje 5-stena váhy najviac 17. Práca [T. Madaras, *On the structure of plane graphs with minimum face size 5*, **Discussiones Mathematicae Graph Theory** **24**(3) (2004), 403 – 411] ďalej sleduje lokálnu štruktúru grafov vymedzených touto podmienkou, keď ukazuje – pre takéto polyedrálne grafy – existenciu 3-hviezdy s váhou najviac 13, či klastra dvoch susedných stien (5- a najviac 6-uholníkovej), ktorého vrcholy majú stupne najviac 9. Uvažovali sa tiež kombinované podmienky minimálneho stupňa vrcholov/stien spolu s minimálnou váhou/duálnou váhou hrán (práca [B. Ferencová, T. Madaras, *Light graphs in families of polyhedral graphs with prescribed minimum degree, face size, edge and dual edge weight*, **Discrete Mathematics** **310**(12) (2010), 1661 – 1675], na ktorú neskôr nadviazali spoločné práce s doktorandom P. Hudákom [P. Hudák, T. Madaras, *On doubly light triangles in plane graphs*, **Discrete Mathematics** **313**(19) (2013), 1978 – 1988]; [P. Hudák, M. Maceková, T. Madaras, P. Široczki, *Light graphs in planar graphs of large girth*, **Discussiones Mathematicae Graph Theory** **36**(1) (2016), 227 – 238]; [P. Hudák, M. Maceková, T. Madaras, P. Široczki, *More on the*

*structure of plane graphs with prescribed degrees of vertices, faces, edges and dual edges*, **Ars Mathematica Contemporanea** **13(2)** (2017), 355 – 366]). Väčšina spomenutých prác zaznamenala početné a netriviálne citácie najmä v publikáciách sibírskej výskumnej grafovej skupiny pod vedením O. V. Borodina.

Motivovaní vyššie uvedenými výsledkami S. Jendroľ a jeho spolupracovníci prišli s konceptom ľahkých grafov definovaným nasledovne:

Graf  $H$  je **ľahký** v množine grafov  $\mathcal{A}$ , ak aspoň jeden graf z  $\mathcal{A}$  obsahuje ako podgraf graf  $H$  a existuje konštanta  $w(H, \mathcal{A})$  taká, že každý graf  $G$  z  $\mathcal{A}$ , ktorý obsahuje ako podgraf kópiu  $H$ , má aj kópiu  $K$  grafu  $H$  takú, že  $w(K) \leq w(H, \mathcal{A})$ .

Tento koncept pokrýva vyššie uvedené výsledky o ľahkej hrane, ľahkých cestách a kružniciach a iných podgrafoch s pevne ohraničenou váhou a umožňuje ich porovnanie, hľadanie analogických tvrdení a ďalšie zovšeobecňovanie. V rámci ďalšieho plodného výskumu v tejto oblasti (na ktorom sa podieľala Košická škola, jej zahraniční spolupracovníci P. J. Owens, J. Harant, E. Hexel, H. Walther, R. Škrekovski a najmä prof. H.-J. Voss, ako aj ďalší zahraniční kolegovia, napr. O. V. Borodin a B. Mohar) dosiahnuté výsledky vyústili do stále živej teórie ľahkých grafov. Podrobnejšie sa o rozličných výsledkoch a otvorených problémoch tejto teórie pre rovinné grafy, resp. mapy na plochách vyšších rodov možno dozvedieť v prácach [S. Jendroľ, H.-J. Voss, *Light subgraphs of graphs embedded in the plane – A survey*, **Discrete Math.** **313** (2013), 406 – 421], resp. [S. Jendroľ, H.-J. Voss, *Light subgraphs of graphs embedded in 2-dimensional manifolds of Euler characteristic at most 0 – A survey*, in: **Paul Erdos and his Mathematics. II, Bolyai Society Mathematical Studies** **11, Budapest 2002, 375 – 411**] (tu sa žiada povedať, že posledný menovaný článok vznikol na požiadanie zostavovateľov obsahu publikácie).

Nedávne dve práce o lokálnych vlastnostiach rovinných grafov ([T. Madaras, M. Tamášová, *Minimal unavoidable sets of cycles in plane graphs*, **Opuscula Mathematica**, **38(6)**, (2018),

859 – 870] a [T. Madaras, M. Tamášová, *Minimal unavoidable sets of cycles in plane graphs with restricted minimum degree and edge weight*, **Australasian Journal of Combinatorics** 74(2) (2019), 240 – 252]), sa týkajú naoko ľahšieho problému: existencie, resp. neexistencie špecifických krátkych kružníc v rôznych triedach rovinných grafov (bez požiadavky na nízky stupeň ich vrcholov); sofistikovanosť použitých konštrukcií grafov pre negatívne výsledky, ako i dôkazy existencie využívajúce metódu prerozdelenia náboja (čo je klasická dôkazová technika pre farebnostné resp. štrukturálne tvrdenia o planárnych, rovinných či im podobných grafoch) nie je v princípe odlišná od náročných dôkazov v rámci teórie ľahkých grafov. To, že problematika ľahkých grafov je v prostredí Košickej školy i KOKOSu stále aktuálna, potvrdzujú aj nasledujúce dva čerstvé články: [K. Čekanová, M. Maceková, R. Soták, *Structure of edges in plane graphs with bounded dual edge weight*, **Discrete Math.** 344 (2021) 112477] a [K. Čekanová, M. Maceková, Z. Šárošiová, R. Soták, *Light 3-stars in embedded graphs*, **Discrete Math.** 346 (2023) 113256].

## 5.7 1-planárne grafy

Štúdium reprezentácií grafov ako kolekcii objektov s určenými vlastnosťami sa spočiatku uberalo už skôr spomenutou cestou výskumu vnorení grafov (do roviny, resp. plôch vyšších rodov); neskôr (cca od 40. rokov 20. stor.) sa objavili témy súvisiace s nakresleniami grafov, v ktorých sa hrany môžu pretínať (napr. problematika priesečníkového čísla). Ako zaujímavý koncept v tomto smere sa ukázalo mierne zovšeobecnenie pojmu planarity, kde sa pripúšťajú priesečníky na hranách nakreslenia v rovine, avšak najviac jeden na každej hrane; graf, pre ktorý existuje takéto nakreslenie sa nazýva **1-planárny**. Prvotne sa 1-planárne grafy skúmali najmä v súvislosti so simultánnymi vrcholovo-stenovými zafarbeniami rovinných grafov (a tiež kvôli Ringelovej hypotéze o ich 6-zafarbitelnosti, ktorú dokázal Borodin v r. 1984). Úva-



hy o tom, že aj pre grafy z tejto triedy by mohli platiť analogické tvrdenia o ľahkých hranách, resp. ľahkých grafoch sa v prostredí Košickej školy objavili až na začiatku nového milénia (v tom období teória ľahkých grafov mala za sebou celú plejádu výsledkov o rovinných grafoch). Prvou takouto prácou bol článok [I. Fabrici, T. Madaras, *The structure of 1-planar graphs*, **Discrete Mathematics** 307(7-8) (2007), 854 – 865], kde autori dokázali platnosť analógie Kotzigovej vety o ľahkej hrane pre 3-súvislé 1-planárne grafy a viacero štruktúrnych výsledkov pre 1-planárne grafy s vysokým minimálnym stupňom vrcholov. Článok doposiaľ zaznamenal vyše 110 citácií podľa databázy Scopus (najmä v prácach čínskych matematikov) a je tak momentálne najcitovanejšou prácou Košickej školy o lokálnych vlastnostiach grafov.

Problematika vlastností 1-planárnych grafov bola neskôr rozpracovaná v niekoľkých prácach v rámci doktorandského štúdia D. Hudáka, pozri napr. [D. Hudák, T. Madaras, *On local structure of 1-planar graphs of minimum degree 5 and girth 4*, **Discussiones Mathematicae Graph Theory** 29(2) (2009), 385 – 400], resp. [D. Hudák, T. Madaras, *On local properties of 1-planar graphs with high minimum degree*, **Ars Mathematica Contemporanea** 4(2) (2011), 245 – 254] a tiež ďalšie, početne citované práce D. Hudáka o iných aspektoch 1-planárnych grafov v spoluautorstve s J. Czapom ([J. Czap, D. Hudák, *1-planarity of complete multipartite graphs*, **Discrete Appl. Math.** 160(4-5), 505 – 512] s 26 citáciami, [J. Czap, D. Hudák, *On drawings and decompositions of 1-planar graphs*, **Electron. J. Combin.** 20(2) (2013)] s 22 citáciami, ako aj [J. Czap, *A note of colorings of 1-planar graphs*, **Inform. Process. Lett.** 113 (2013), 516 – 517] a [J. Czap, J. Przybylo, E. Škrabuláková, *On an extremal problem in a class of bipartite 1-planar graphs*, **Discuss. Math. Graph Theory** 36 (2016), 141 – 151]).

Rozličné problémy, ktoré sa uvažovali pre planárne grafy, možno skúmať – pokiaľ to povaha problému dovoľuje – i pre 1-planárne grafy. Vďačnou a otvorenou témou v tomto smere je, napr. hamiltonovskosť vo vzťahu k maximalite grafu resp. jeho vrcholovej súvislosti. Prvé výsledky v tejto oblas-

ti sa dosiahli v práci [D. Hudák, T. Madaras, Y. Suzuki, *On properties of maximal 1-planar graphs*, **Discussiones Mathematicae Graph Theory** 32(4) (2012), 737 – 747] pre maximálne 1-planárne grafy. V práci [I. Fabrici, J. Harant, T. Madaras, S. Mohr, R. Soták, C. T. Zamfirescu, *Long cycles and spanning subgraphs of locally maximal 1-planar graphs*, **Journal of Graph Theory** 95 (2020), 125 – 137] sa študovali najdlhšie kružnice a faktorové podgrafy vo vysokosúvislých 1-planárnych grafoch, ktorých priesečníky indukujú kompletne, resp. takmer kompletne 4-vrcholové grafy; autori dokázali, že existuje nekonečne veľa nehamiltonovských 5-súvislých slabo lokálne maximálnych 1-planárnych grafov (čo je markantný rozdiel oproti faktu, že každý 4-súvislý planárny graf je hamiltonovský), avšak, každý 4-súvislý lokálne maximálny 1-planárny graf je už hamiltonovský (obdoba Whitneyovej vety pre rovinné 4-súvislé triangulácie).

## 5.8 Erdősov problém o minimálnej váhe grafu

J. Ivančo prezentoval svoj pekný výsledok o ľahkej hrane v polyedrálnej mape na orientovateľnej ploche rodu  $g \geq 0$  na medzinárodnom 4. Československom sympóziu o kombinatórike, ktoré sa konalo v Českých Prachaticiach v roku 1990. Prednáška veľmi zaujala prítomného prof. P. Erdősa. Počas diskusie sa spýtal: „Aká je minimálna váha  $w(e)$  hrany  $e$  v grafe  $G = G(n, m)$ , ktorý má  $n$  vrcholov a  $m$  hrán?“ Prvé kroky k odpovedi na Erdősovu otázku vykonali J. Ivančo a S. Jendroľ, ktorí v práci [*On extremal problems concerning weights of edges of graphs*, in: **Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 60. Sets, Graphs and Numbers, Budapest (Hungary) 1991 (North Holland, 1993), 399 – 410**] sformulovali domnienku, ako by malo riešenie vyzeráť. Presnú odpoveď na otázku našli S. Jendroľ a I. Schiermeyer v práci [*On a max-min problem concerning weights of edges*, **Combinatorica** 21 (2001), 351 – 359], čím danú domnienku potvrdili.

K Erdősovej otázke sa S. Jendroľ a I. Schiermeyer spolu s M. Horňákom neskôr vrátili nasledujúcim spôsobom:

Nech  $\mathcal{P}$  je grafová vlastnosť. Aká je minimálna váha  $w(e)$  nejakej hrany  $e$  v grafe  $G = G(n, m, \mathcal{P})$ , ktorý má  $n$  vrcholov,  $m$  hrán a zároveň vlastnosť  $\mathcal{P}$ ?

V práci [*On maximum weight of a bipartite graph of given order and size*, **Discuss. Math. Graph Theory** **33** (2013), 147 – 165] autori našli úplnú odpoveď na vyššie položenú otázku v prípade, že  $\mathcal{P}$  je vlastnosť „byť bipartitným grafom“. Tá istá trojica autorov našla úplné riešenie Erdősovej otázky aj pre prípad, keď vlastnosť  $\mathcal{P}$  požaduje, aby graf  $G$  bol súvislý; riešenie je obsiahnuté v prácach [*On the maximum weight of a dense connected graph of given order and size*, **Discrete Math.** **339** (2016), 1978 – 1984] a [*On the maximum weight of a sparse connected graph of given order and size*, **Graphs Combin.** **32** (2016), 997 – 1012].

V práci [A. Gajdoš, M. Horňák, P. Hudák, T. Madaras, *On the maximum weight of a planar graph of given order and size*, **Discrete Appl. Math.** **338** (2015), 2234 – 2241] je Erdősova otázka vyriešená pre prípad, keď  $\mathcal{P}$  je vlastnosť „byť planárnym grafom“.

## 5.9 Mnohosteny s najviac dvomi typmi hrán

V prípadoch konvexných mnohostenov je možné definíciu  $(a, b)$ -hrany sprísiť tak, že do úvahy vezmeme aj stupne stien incidentných s danou hranou. Na základe toho S. Jendroľ a M. Tkáč definovali typ hrany  $e$  ako štvoricu  $((a, b); (m, n))$ , kde  $a$  a  $b$  sú stupne vrcholov incidentných s hranou  $e$  a  $m, n$  sú stupne stien incidentných s  $e$ . S. Jendroľ ukázal, že existuje práve 9 konvexných mnohostenov s práve jedným typom hrán. Veľmi zaujímavou triedou konvexných mnohostenov

sa ukázali byť tie, ktoré majú práve dva typy hrán. S. Jendroľ a M. Tkáč v práci [*Convex 3-polytopes with exactly two types of edges*, **Discrete Math.** **84** (1990), 143 – 160] kompletne charakterizovali mohutnosti množín všetkých takých mnohostenov. Následne boli popísané vrcholové vektory štvoruholníkových mnohostenov s dvomi typmi hrán v článku (na požiadanie vydavateľov) [S. Jendroľ, E. Jucovič, M. Trenker, *Vertex-vectors of quadrangular 3-polytopes with two types of edges*, **Combinatorics and graph theory, Banach Center Publications, Vol. 25**, Vol. PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw 1989].

E. Jucovič priniesol do KOKOSu aj tematiku najdlhších kružníc v polyedrálnej grafoch svojou prácou s H. Waltherom [*Über längste Kreise in flächenregularen polyedergraphen*, **Mat. Čas.** **23** (1973), 164 – 169]. Bolo preto prirodzené skúmať správanie sa najdlhších kružníc aj v grafoch mnohostenov s dvomi typmi hrán. S. Jendroľ a P. Mihók dokázali, že všetky polyedrálne 3-regulárne mnohosteny, ktorých každá hrana inciduje s dvomi 5-stenami alebo s jednou 5-stenou a jednou 12-stenou sú hamiltonovské (viď [*On a class of Hamiltonian polytopes*, **Discrete Math.** **71** (1988), 233 – 241]). Táto problematika oslovila aj viacerých kolegov v zahraničí, ktorí o nej napísali niekoľko prác. Boli to najmä naši neskorší priatelia P. J. Owens z Anglicka a nemeckí kolegovia J. Harant a H. Walther, ktorí s M. Tkáčom uverejnili ďalšie práce (pozri napr. [*5-regular 3-polytopal graphs with edges of only two types and shortness exponents less than one*, **Discrete Math.** **150** (1996), 143 – 153]). Zaujímavé výsledky o najdlhších kružniciach v trojuholníkových resp. štvoruholníkových mnohostenoch s dvomi typmi hrán publikovali S. Jendroľ a R. Kekeňák ([*Longest circuits in triangular and quadrangular 3-polytopes with two types of edges*, **Math. Slovaca** **40** (1990), 341 – 357]) a v päťuholníkových mnohostenoch S. Jendroľ a P. J. Owens ([*Pentagonal 3-polytopal graphs with edges of only two types and shortness parameters*, **Discrete Math.** **137** (1995), 251 – 236]).

Príbuznou problematikou je štúdium konvexných mnohostenou s predpísanými váhami (t.j. súčtami stupňov incident-

ných vrcholov) stien. V práci [M. Horňák, J. Ivančo, *On the number of 3-polytopes with constant face weight*, **Studia Sc. Math. Hungarica** 39 (2002), 1 – 19] sú nájdené mohutnosti množín konvexných mnohostenov s konštantnou váhou všetkých stien.

## 5.10 Chemické grafy

Raný rozvoj teórie grafov ako matematickej disciplíny bol priamo spätý s aplikáciami v chémii: myšlienka reprezentovať molekuly chemických zlúčenín ako grafy (kde vrcholy zodpovedajú atómom a hrany jednoduchým, resp. násobným väzbám medzi nimi) sa objavila už v prácach A. Cayleyho v 19. storočí (v súvislosti s počítaním počtu izomérov acyklických uhľovodíkov – alkánov). Neskôr (cca od polovice 20. storočia) sa objavujú práce preukazujúce silnú koreláciu medzi mnohými fyzikálno-chemickými vlastnosťami organických zlúčenín a invariantami vzťahujúcimi sa ku grafom molekúl daných zlúčenín; toto vyústilo do samostatnej matematickej disciplíny – chemickej teórie grafov. S rozvojom nových možností syntézy chemických látok sa pozornosť chemikov upriamila tiež na prípravu a výskum vlastností organických molekúl s tvarmi konvexných mnohostenov. Táto téma sa ukázala byť veľmi horúcou najmä v súvislosti s objavom nových foriem uhlíka – molekuly  $C_{60}$  (za čo bola v r. 1995 udelená Nobelova cena) a následne ďalších podobných molekúl tzv. fullerénov. Tieto štruktúry sú vlastne kubické mnohosteny, ktoré majú presne 12 päťuholníkových stien a ostatné steny sú šesťuholníky. Ich grafy majú (v porovnaní s inými rovinnými grafmi) viacero pekných vlastností, napr. obsahujú perfektné spárenie – množinu hrán  $M$  takú, že žiadne dve hrany z  $M$  nemajú spoločný vrchol a každý vrchol inciduje s nejakou hranou z  $M$  (v molekule zodpovedajú dvojitým väzbám medzi uhlíkovými atómami). Jeden z najatraktívnejších problémov týkajúcich sa grafov fullerénov však bola otázka existencie hamiltonovskej kružnice; bola pritom špeciálnym

prípacom domnienky Goodeyho a Barnetta zo 70-tych rokov 20. storočia, podľa ktorej sú všetky kubické 3-súvislé rovinné grafy so stenami veľkosti najviac 6 hamiltonovské. Pozitívna odpoveď na túto otázku by značne uľahčila klasifikáciu a porovnávanie rozličných fullerénov. Cesta k dôkazu hypotézy viedla cez štúdium najdlhších kružníc v polyedrálnych grafoch, s ktorým mali členovia Košickej školy už predchádzajúce bohaté skúsenosti. Prvý výrazný prielom sa podaril S. Jendroľovi a P. J. Owensovi: v článku [*Longest cycles in generalized Buckminsterfullerene graphs*, **J. Math. Chem.** **18** (1995), **83 – 90**] (na matematickú prácu pomerne rýchlo uverejnenom) dokázali, že každý fullerén obsahuje kružnicu, na ktorej leží aspoň 80% atómov uhlíka. Po sérii následných vylepšení tohto výsledku sa napokon F. Kardošovi podarilo horeuvedenú domnienku dokázať v [F. Kardoš, *A computer-assisted proof of Barnette-Goodey conjecture: Not only fullerene graphs are Hamiltonian*, **SIAM J. Discrete Math.** **34** (1) (2020), **62 – 100**]; dôkaz spočíva v postupnej transformácii grafu fullerénu a jeho redukcii do stavu, kde bolo postačujúce použiť počítačové prehľadávanie možností vzájomného usporiadania stien veľkosti ostro menšej ako 6 na lokálne overenie požadovaných globálnych vlastností príslušných grafov.

Nárast všeobecného záujmu o problematiku matematických vlastností fullerénov a im príbuzných mnohostenov pri niesol tiež záujem o skoršiu prácu [S. Jendroľ, *On face-vectors of trivalent convex polyhedra*, **Math. Slovaca** **33** (1983), **165 – 185**]. Neskôr sa podarilo kladne vyriešiť otázku z teoretickej chémie o možnej existencii kubického fulleroidu, t.j. mnoho-stena, ktorý obsahuje len päťuholníkové a  $n$ -uholníkové steny a navyše má grupu symetrií izomorfnú s rotačnou grupou symetrií dvadsaťstena (angl. icosahedron), viď [S. Jendroľ, M. Trenkler, *More icosahedral fulleroids*, **J. Math. Chem.** (2001)]. Pokračujúc vo výskume možných grúp symetrií fulleroidov, S. Jendroľ a F. Kardoš publikovali prácu [*On octahedral fulleroids*, **Discrete Appl. Math.** **155** (2007), **2181 – 2186**]; následne dostali pozvanie napísať kapitolu do monografického diela o fullerénoch a fulleroidoch. Výsledkom ich spoloč-

nej práce bola kapitola [S. Jendroľ, F. Kardoš, *Symmetry of fullerenoids*, in: **Handbook of Nanophysics** (K. D. Sattler) Taylor & Francis Publishers (CRC Press), Boca Raton 2010, Chapter 28, 1 – 13].

## 5.11 Dlhé kružnice v polyedrálных grafoch

Je známe, že polyedrálne grafy nielenže nemusia byť hamiltonovské, ale ich najdlhšie kružnice môžu mať – vzhľadom na počet vrcholov grafu – iba sublineárnu dĺžku. Prirodzene sa preto venovala pozornosť skúmaniu dodatočných podmienok, za ktorých možno v polyedrálных grafoch nájsť kružnice lineárnej dĺžky. Jednou z takýchto podmienok je požiadavka na špecifické vlastnosti minimálnych množín vrcholov (tzv. vrcholových rezov), ktorých odstránenie porušuje súvislosť grafu. Definovaná je nasledovne: planárny 3-súvislý graf  $G$  je **esenciálne 4-súvislý**, ak pre každý jeho vrcholový 3-rez  $S$  platí, že jeden z komponentov grafu  $G - S$  získaného z  $G$  odobratím všetkých vrcholov  $S$  pozostáva z jediného vrchola. I. Fabrici, J. Harant a S. Jendroľ – nadväzujúc na predchádzajúcu dlhoročnú úspešnú spoluprácu Košickej školy s výskumnou skupinou na Technische Universität Ilmenau, Nemecko – v práci [*On longest cycles in essentially 4-connected planar graphs*, **Discuss. Math. Graph Theory** 36 (2016), 565 – 575] obnovili štúdium najdlhších kružníc v esenciálne 4-súvislých polyedrálных grafoch vylepšením dovedajších dolných ohraničení ich dĺžok. Ukázali, že dĺžka takejto kružnice je aspoň  $\frac{1}{2}(n + 4)$  vo všeobecnosti, resp. aspoň  $\frac{13}{21}(n + 4)$  ak  $G$  je  $n$ -vrcholový maximálny planárny graf. Neskôr I. Fabrici, J. Harant, S. Mohr a J. M. Schmidt v článku [*Circumference of essentially 4-connected planar triangulations*, **J. Graph Algorithm Appl.** 25 (2021), 121 – 132] vylepšili tento odhad na  $\frac{2}{3}(n + 4)$  (tento odhad je tesný). Tí istí autori dokázali v práci [*Longer cycles in essentially 4-connected planar graphs*, **Discuss. Math. Graph Theory** 40 (2020), 269 – 277], že esenciálne 4-súvislý

planárny graf na  $n$  vrchoch obsahuje kružnicu dĺžky aspoň  $\frac{3}{5}(n+2)$ , ktorú navyše v grafe možno nájsť v čase  $O(n^2)$ .

V poslednom období sa tiež v prostredí Košickej školy skúmali grafy, ktoré nie sú hamiltonovské, avšak z pohľadu dĺžok najdlhších kružníc k nim majú veľmi blízko. Ide o tzv. hypohamiltonovské grafy, z ktorých odstránením ľubovoľného vrchola vždy vznikne hamiltonovský graf. I. Fabrici, T. Madaras a M. Timková v práci [*Forbidden configurations for hypohamiltonian graphs*, **Opuscula Mathematica** **38(3)** (2018), 357 – 377] priniesli rozsiahly zoznam zakázaných konfigurácií pre hypohamiltonovské grafy; neskôr v spolupráci s kolegami z Ghent University v Belgicku v článku [I. Fabrici, T. Madaras, M. Timková, N. Van Cleemput, C. T. Zamfirescu, *Non-hamiltonian graphs in which every edge-contracted subgraph is hamiltonian*, **Applied Mathematics and Computation** **392** (2021) 125714] iniciovali štúdium vlastností celkom novej triedy tzv. perihamiltonovských grafov (t.j. nehamiltonovských grafov takých, že kontrakciou každej ich hrany vznikne hamiltonovský graf).

Spolupráca s výskumnou skupinou z TU Ilmenau, Nemcko priniesla tiež zaujímavé výsledky o dlhých kružniciach prechádzajúcich cez predpísané vrcholy v grafoch. V článku [J. Harant, S. Jendroľ, H. Walther, *On long cycles through four prescribed vertices of a polyhedral graph*, **Discuss. Math. Graph Theory** **28** (2008), 441 – 451] je dokázané, že

ak 3-súvislý rovinný graf  $G$  obsahuje najdlhšiu kružnicu dĺžky  $c \geq 44$ , tak má aj kružnicu dĺžky aspoň  $\frac{1}{36}c + \frac{20}{3}$  prechádzajúcu cez akékoľvek štyri vrcholy  $G$ .

## 5.12 Cyklické zafarbenia rovinných grafov

Známy problém štyroch farieb a snahy o jeho vyriešenie motivovali matematikov od druhej polovice 20. storočia ku skúmaniu zafarbení rovinných grafov, ktoré by zovšeobecnil



klasické regulárne zafarbenie, pričom v prípade rovinných triangulácií by viedli k žiadanému vrcholovému 4-zafarbeniu. Takto Ore a Plummer v r. 1969 zaviedli cyklické zafarbenie rovinného grafu ako také zafarbenie jeho vrcholov, pri ktorom žiadne dva vrcholy patriace tej istej stene nemajú rovnakú farbu; k tomu definovali pojem cyklického chromatického čísla rovinného grafu ako minimálny počet farieb, ktorými sa dá rovinný graf cyklicky zafarbiť.

Plummer s Toftom v práci [M. D. Plummer, B. Toft, *Cyclic coloration of 3-polytopes*, **Journal of Graph Theory** 11 No. 4 (1987), 507 – 515] sformulovali hypotézu, podľa ktorej by cyklické chromatické číslo 3-súvislého rovinného grafu  $G$  nemalo presiahnuť maximálny stupeň steny v grafe  $G$  o viac než 2. V práci [H. Enomoto, M. Horňák, S. Jendroľ, *Cyclic chromatic number of 3-connected plane graphs*, **SIAM Journal on Discrete Mathematics** 14 No. 1 (2001), 121 – 137] autori dokázali, že ak maximálny stupeň steny v 3-súvislom rovinnom grafe  $G$  je  $\Delta^* \geq 60$ , tak cyklické chromatické číslo grafu  $G$  neprevyšuje  $\Delta^* + 1$ . Ide o absolútny, teda vo všeobecnosti nezlepšiteľný výsledok (keďže graf  $\Delta^*$ -bokého ihlana túto hranicu pre počet farieb dosahuje). Čo sa týka hypotézy Plummera a Tofta, najprv M. Horňák a S. Jendroľ v práci [*On a conjecture by Plummer and Toft*, **J. Graph Theory** 30 (1999), 177 – 189] dokázali jej platnosť pre  $\Delta^* \geq 24$ , potom v práci [M. Horňák, J. Zlámalová, *Another step towards proving a conjecture by Plummer and Toft*, **Discrete Mathematics** 310 No. 3 (2010), 442 – 452] autori prispeli k jej vyriešeniu analýzou prípadov, keď maximálny stupeň steny v grafe  $G$  je  $\Delta^* \geq 18$ . Momentálne je hypotéza dokázaná pre prípad  $\Delta^* = 3$  (Four Colour Theorem),  $\Delta^* = 4$  [O. V. Borodin, *Solution of the Ringel problem on vertex-face coloring of plane graphs and coloring of 1-planar graphs*, **Metody diskretného analízy** 41 (1984), 12 – 26] a  $\Delta^* \geq 16$  [Z. Dvořák, M. Hebdige, F. Hlásek, D. Král, J. A. Noel, *Cyclic coloring of plane graphs with maximum face size 16 and 17*, **European Journal of Combinatorics** 94 (2021) 103287]. J. Zlámalová v práci [*A note on cyclic chromatic number*, **Discuss. Math. Graph Theory** 30 (2010), 115 – 122] dokázala platnosť hypotézy pre

3-súvislé rovinné grafy s  $\Delta^* \geq 6$  a minimálnym vrcholovým stupňom  $\delta(G) \geq 4$ , resp. s minimálnym vrcholovým stupňom  $\delta(G) \geq 5$ .

Doposiaľ najlepší výsledok pre 3-súvislé rovinné grafy vo všeobecnosti je obsiahnutý v práci [H. Enomoto, M. Horňák, *A general upper bound for the cyclic chromatic number of 3-connected plane graphs*, **Journal of Graph Theory** **62** No. 1 (2009), 1 – 25]: ich cyklické chromatické číslo je nanajvyš  $\Delta^* + 5$ .

Pokiaľ ide o súvislé rovinné grafy, O. V. Borodin v r. 1984 vyslovil hypotézu, že cyklické chromatické číslo súvislého rovinného grafu je najviac  $\lceil \frac{3\Delta^*}{2} \rceil$ , ak  $\Delta^* \geq 3$ . Táto hypotéza je známa ako **Cyclic Coloring Conjecture**. Aktuálny stav riešenia tejto hypotézy, uvedený spolu s čiastočnými či približnými riešeniami je obsahom nedávnej publikácie [S. Jendroľ, R. Soták, *On the cyclic coloring conjecture*, **Discrete Math.** **344** (2021) 112204].

## 5.13 Faciálne zafarbenia rovinných grafov

Definície viacerých špecifických zafarbení grafov (ktorých špeciálnymi prípadmi sú štandardné regulárne zafarbenia) sa opierajú o farebné vlastnosti ciest v zafarbenom grafe. V prípade rovinných grafov možno uvažovať obmeny týchto zafarbení tým, že sa do definície nezahrnie množina všetkých ciest v grafe, ale len tzv. **faciálnych ciest**, t.j. ciest, ktoré sú časťou hraničného sledu nejakej steny, pričom každá dvojica po sebe idúcich hrán cesty je súsledná na stene, ktorú hraničný sled vymedzuje. V rámci Košickej školy diskkrétnej matematiky bolo iniciované štúdium celého radu problémov motivovaných farebnými vlastnosťami faciálnych ciest, resp. faciálnych sledov. Podrobnejšie o nich sa možno dozvedieť v prehľadových prácach [J. Czap, S. Jendroľ, *Facially-constrained colorings of a plane graphs: A survey*, **Discrete Math.** **340** (2017), 2691 – 2703] a [J. Czap, M. Horňák, S. Jendroľ, *A survey on the cyc-*

*lic coloring and its relaxations*, **Discuss. Math. Graph Theory** **41** (2021), 5 – 38]. Nižšie si pripomenieme len zopár najkrajších výsledkov o faciálnych zafarbeniach rovinných grafov, ktoré sú výsledkom snaženia viacerých reprezentantov Košickej školy diskkrétnej matematiky.

### 5.13.1 *Faciálne zoznamové zafarbenie rovinných grafov*

Nech  $G = (V, E, F)$  je súvislý rovinný graf s vrcholovou množinou  $V$ , hranovou množinou  $E$  a stenovou množinou  $F$ . Pre  $X \in \{V, E, F, V \cup E, V \cup F, E \cup F, V \cup E \cup F\}$ , dva rôzne prvky z  $X$  sú faciálne susedné v  $G$ , ak sú to susedné vrcholy, susedné steny, incidentné prvky grafu alebo faciálne susedné hrany. Zoznamové  $k$ -zafarbenie je faciálne vzhľadom na  $X$ , ak existuje zoznamové zafarbenie prvkov z  $X$  také, že faciálne susedné prvky z  $X$  získajú (každý zo svojho zoznamu farieb, ktorý má dĺžku  $k$ ) rôzne farby. V práci [I. Fabrici, S. Jendroľ, M. Voigt, *Facial list colourings of plane graphs*, **Discrete Math.** **339** (2016), 2826 – 2831] je dokázané, že každý rovinný graf  $G = (V, E, F)$  má faciálne zoznamové 4-zafarbenie vzhľadom na  $X = E$ , faciálne zoznamové 6-zafarbenie vzhľadom na  $X \in \{V \cup E, E \cup F\}$  a faciálne zoznamové 8-zafarbenie vzhľadom na  $X = V \cup E \cup F$ . Pre rovinné triangulácie je každý z týchto výsledkov vylepšený o jedna a je tesný. Tieto výsledky dopĺňajú Thomassenovu vetu, že každý rovinný graf má zoznamové 5-zafarbenie vzhľadom na  $X \in \{V, F\}$  a vetu Wanga a Liha, že každý jednoduchý rovinný graf má zoznamové 7-zafarbenie vzhľadom na  $X = V \cup F$ .

V práci [J. Grytczuk, S. Jendroľ, M. Zając, *Graph polynomials and paintability of plane graphs*, **Discrete Appl. Math.** **313** (2022), 71 – 79] sú tieto výsledky ešte vylepšené v zmysle, že horeuvedené konštanty zhora ohraničujú nielen faciálnu voliteľnosť uvažovaných grafov, ale aj ich Alonovo-Tarsiho číslo (ktoré samo osebe tvorí horný odhad voliteľnosti grafu).

### 5.13.2 *Faciálne nerepetitívne zafarbenia*

Hranové zafarbenie rovinného grafu  $G$  sa nazýva **faciálne nerepetitívne**, ak v  $G$  neexistuje faciálna cesta taká, že jej prvá polovica je zafarbená tou istou postupnosťou farieb ako jej druhá polovica. Tento druh zafarbenia bol inšpirovaný nerepetitívnym hranovým zafarbením, ktoré zaviedli na začiatku milénia N. Alon, J. Grytczuk a kol. ako koncept zovšeobecňujúci známe Thueove postupnosti (tieto zodpovedajú nerepetitívnym zafarbeniam ciest). V [F. Havet, S. Jendroľ, R. Soták, E. Škrabuláková, *Facial non-repetitive edge coloring of plane graphs*, **J. Graph Theory** **66** (2010), 38 – 48] je dokázané, že každý strom má faciálne hranové nerepetitívne zafarbenie 4 farbami, každý súvislý multigraf 8 farbami, každý jednoduchý 3-súvislý rovinný graf resp. každý hamiltonovský rovinný graf 7 farbami.

Analogicky (v práci [J. Harant, S. Jendroľ, *Nonrepetitive vertex colorings of graphs*, **Discrete Math.** **312** (2012), 374 – 380]) je definovaná vrcholová verzia faciálneho nerepetitívneho zafarbenia. J. Barát a J. Czap dokázali v [*Facial nonrepetitive vertex coloring of plane graph*, **J. Graph Theory** **74** (2013), 115 – 121], že každý rovinný graf má vrcholové faciálne nerepetitívne zafarbenie najviac 24 farbami.

### 5.13.3 *Faciálne zafarbenia s jedinečným maximom*

Vrcholové zafarbenie rovinného grafu  $G$  s jedinečným maximom je také zafarbenie, že pre každú stenu  $f$  v  $G$  sa farba s najvyššou číselnou hodnotou vyskytne práve na jednom vrchole  $f$ . I. Fabrici a F. Göring v [*Unique-maximum coloring of plane graphs*, **Discuss. Math. Graph Theory** **36** (2016), 95 – 102] dokázali, že každý rovinný graf má takéto vrcholové zafarbenie najviac 3 farbami resp. najviac 6 farbami v prípade, že sa žiada regulárnosť zafarbenia. Vyslovili tiež hypotézu, že hranica 6 by sa mohla znížiť na 4 (čo by znamenalo zosilnenie vety o štyroch farbách). Následne A. Wendland v [*Coloring of plane graphs with unique maximal color on faces*, **J. Graph Theory**

83 (2016), 359 – 371] vylepšil Fabriciho a Göringovu hranicu o 1 a zanedlho nato B. Lidický, K. Messerschmidt, R. Škrekovski [A counterexample to a conjecture on facial unique-maximal colorings, *Discrete Appl. Math.* 237 (2018), 123 – 123] skonštruovali príklad rovinného grafu, ktorý ukázal, že hranica 5 je vo všeobecnosti tesná.

Pre hranovú a totálnu verziu zafarbenia s jedinečným maximom I. Fabrici, M. Horňák a S. Rindošová v [Facial unique-maximum edge and total colouring of plane graphs, *Discrete Appl. Math.* 291 (2021), 171 – 179] ukázali, že každý 2- hranovo-súvislý graf je faciálne 4- hranovo a 6- totálne- zafarbiteľný vzhľadom na podmienku jediného maxima; hranice 4 a 6 sú tesné. Pre zoznamovú verziu týchto zafarbení súvislých rovinných grafov je v uvedenom článku dokázané, že príslušné zafarbenia existujú, ak sa farby vyberajú zo zoznamov dĺžok 6, resp. 8.

#### 5.13.4 Faciálne zafarbenia s nepárny výskytom farieb na stenách

Faciálne nepárne vrcholové (resp. hranové) zafarbenie 2- súvislého rovinného grafu  $G$  je také zafarbenie jeho vrcholov (resp. jeho hrán), že na každej stene sa každá tam vyskytujúca farba vyskytuje nepárny počet krát. V [J. Czap, S. Jendroľ, M. Voigt, Parity vertex coloring of plane graphs, *Discrete Math.* 311 (2011), 512 – 520] bolo dokázané, že každý rovinný 2- súvislý graf má nepárne vrcholové zafarbenie 118 farbami. Hranica 118 bola znížená na 97 v práci [T. Kaiser, D. Král, M. Stehlík, R. Škrekovski, Strong parity vertex coloring of plane graphs, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* 16 (2014), 143 – 158], avšak stále čaká na vylepšenie (i keď pre viaceré špeciálne triedy rovinných grafov táto hranica bola zlepšená podstatným spôsobom).

V prípade faciálneho hranového zafarbenia 2- súvislých rovinných grafov je situácia sľubnejšia. V práci [J. Czap, S. Jendroľ, F. Kardoš, R. Soták, Facial parity edge colouring of plane pseudographs, *Discrete Math.* 312 (2012), 2735 – 2740] je dokázané, že pre hranovo 4- súvislé rovinné grafy stačí 9 farieb, v prí-

pade hranovo 3-súvislých grafov stačí 12 farieb a pre hranovo 2-súvislé stačí 20 farieb. Hranica 20 pre hranovo 2-súvislé grafy bola neskôr vylepšená na 16 v práci [B. Lužar, R. Škrekovski, *Improved bound on facial parity edge coloring*, **Discrete Math.** **313** (2013), 2218 – 2222]; veľmi čerstvý článok K. Štorgela z r. 2023 uvádza príklad grafov, ktoré pre takéto zafarbenie potrebujú 12 farieb.

### 5.13.5 *Faciálne bezanagramové hranové zafarbenia*

Postupnosť  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$  sa nazýva **anagram**, ak postupnosť  $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}$  je permutáciou postupnosti  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Postupnosť  $S$  sa volá **bezanagramová**, ak žiadna podpostupnosť za sebou idúcich členov  $S$  nie je anagram. Zafarbenie hrán daného rovinného grafu  $G$  sa volá **faciálne bezanagramové**, ak postupnosť farieb na hranách žiadneho stenového ťahu netvorí anagram. V práci [J. Czap, S. Jendroľ, R. Soták, *Facial anagram-free edge-coloring of plane graphs*, **Discrete Appl. Math.** **230** (2017), 151 – 155] je ukázané, že každý súvislý rovinný graf  $G$  má faciálne bezanagramové hranové zafarbenie 11 farbami. Navyše, ak  $G$  je 3-súvislý rovinný graf, tak na uvedené zafarbenie stačí 9 farieb.

### 5.13.6 *Krátke monochromatické faciálne cesty*

Slávna veta o štyroch farbách hovorí, že každý rovinný graf sa dá zafarbiť 4 farbami tak, že každé dva susedné vrcholy získajú rôzne farby (a teda monochromatické faciálne cesty sú len jednovrcholové). V práci [J. Czap, I. Fabrici, S. Jendroľ, *Coloring of plane graphs without long monochromatic facial paths*, **Discuss. Math. Graph Theory**, **41** (2021), 801 – 818] je ukázané, že pomocou troch (resp. dvoch) farieb je možné vrcholy každého rovinného grafu zafarbiť tak, že každá najdlhšia faciálna monochromatická cesta má najviac tri (resp. štyri) vrcholy. Autori práce sa domnievajú, že každý rovinný graf možno zafarbiť danými počtami farieb tak, že najdlhšie

faciálne monochromatické cesty majú najviac dva (resp. tri) vrcholy.

## 5.14 Paletové zafarbenia všeobecných grafov

**Paleta vrchola**  $v$  pri regulárnom zafarbení hrán grafu  $G$  (ktorého žiadny komponent nie je kompletný 2-vrcholový graf  $K_2$  a nanajvýš jeden komponent je kompletný 1-vrcholový graf  $K_1$ ) je množina farieb hrán incidentných s  $v$ . **Pozorovateľnosť** (angl. observability) grafu  $G$  je minimálny počet farieb v regulárnom zafarbení hrán  $G$ , ktoré má tú vlastnosť, že akékoľvek dva rôzne vrcholy  $G$  majú rôzne palety. Tento pojem zaviedli J. Černý, M. Horňák, R. Soták v práci [*Observability of a graph*, **Mathematica Slovaca** 46 No. 1 (1996), 21 – 31] nezávisle od práce [A. C. Burris, R. H. Schelp, *Vertex-distinguishing proper edge-colorings*, **Journal of Graph Theory** 26 No. 2 (1997), 73 – 82]. Získali v nej hodnoty tohto nového chromatického invariantu pre grafy niektorých jednoduchých tried. V práci [M. Horňák, R. Soták, *Asymptotic behaviour of the observability of  $Q_n$* , **Discrete Mathematics** 176 (1997), 139 – 148] bol nájdený asymptotický výsledok týkajúci sa pozorovateľnosti grafu  $n$ -rozmernej kocky v závislosti od hodnoty rozmeru  $n$ .

**Susedov rozlišujúci index** (angl. neighbour-distinguishing index) grafu  $G$  (neobsahujúceho  $K_2$  ako komponent) je najmenší počet farieb v takom regulárnom zafarbení hrán  $G$ , že akékoľvek dva susedné vrcholy  $G$  majú rôzne palety. Tento invariant bol definovaný v práci [Z. F. Zhang, L. Z. Liu, J. F. Wang, *Adjacent strong edge colorings of graphs*, **Applied Mathematics Letters** 15 No. 5 (2002), 623 – 626], kde autori taktiež sformulovali hypotézu, podľa ktorej by jeho hodnota nemala prevyšovať maximálny stupeň  $\Delta$  grafu  $G$  o viac než dva, ak každý komponent súvislosti  $G$  má aspoň šesť vrcholov. V práci [K. Edwards, M. Horňák, M. Woźniak, *On the Neighbour-Distinguishing Index of a Graph*, **Graphs and Com-**

**binatorics 22 No. 3 (2006), 341 – 350]** je dokázané, že ak  $G$  je planárny bipartitný graf s maximálnym stupňom  $\Delta \geq 12$ , tak susedov rozlišujúci index  $G$  je nanajvýš  $\Delta + 1$ . V práci [M. Horňák, D. J. Huang, W. F. Wang, *On Neighbor-Distinguishing Index of Planar Graphs*, **Journal of Graph Theory 76 No. 4 (2014), 262 – 278]** autori ukázali, že hypotéza Zhang-Liu-Wang platí pre planárne grafy s maximálnym stupňom aspoň 12.

**Paletový index** (angl. palette index) grafu  $G$  je minimálny počet paliet v akomkoľvek regulárnom zafarbení hrán  $G$ . Pojem prvýkrát zaviedli M. Horňák, R. Kalinowski, M. Meszka a M. Woźniak v práci [*Minimum Number of Palettes in Edge Colorings*, **Graphs and Combinatorics 30 No. 3 (2014), 619 – 626]**, kde okrem iného stanovili hodnoty tohto grafového invariantu pre všetky kompletne grafy.

## 5.15 Silné hranové zafarbenia

P. Erdős a J. Nešetřil v r. 1985 navrhli študovať silné hranové zafarbenie grafu  $G$  ako regulárne zafarbenie hrán, v ktorom každá farebná množina hrán indukuje spárenie. Úlohou je nájsť silný chromatický index  $G$ , teda minimálny počet farieb potrebných na jeho silné hranové zafarbenie. Tento problém je stále živý s mnohými otvorenými otázkami. Aj v KOKOSE sme sa mu venovali. V práci [D. Hudák, B. Lužar, R. Soták, R. Škrekovski, *Strong edge-coloring of planar graphs*, **Discrete Math. 324 (2014), 41 – 49]** sú nájdené horné odhady silného chromatického indexu pre viaceré množiny rovinných grafov. Práca hneď upútala pozornosť, databáza Scopus na ňu doposiaľ eviduje 24 citácií. Aj nedávna práca [B. Lužar, E. Máčajová, M. Škoviera, R. Soták, *Strong edge-coloring of graphs and covers of Kneser graphs*, **J. Graph Theory 100 (2022), 686 – 697]**, ktorá rieši ten istý problém pre Kneserove grafy, už zaznamenala 7 citácií.

V čerstvej práci [B. Lužar, M. Mockovčiaková, R. Soták, *Revisiting semistrong edge-coloring of graphs*, **J. Graph Theory**



(2023), 1 – 21] je študované hranové zafarbenie motivované silným hranovým zafarbením, kde podmienka na zafarbenie je oslabená tak, aby každá hrana každej farebnej množiny mala v podgrafe indukovanom touto množinou hrán stupeň jedna.

## 5.16 Hviezdicové hranové zafarbenia

**Hviezdicové hranové zafarbenie** (angl. star edge coloring) je regulárne zafarbenie hrán bez dvojfarebných ciest a kružníc dĺžky 4. V práci [L. Bezegová, B. Lužar, M. Mockovčiaková, R. Soták, R. Škrekovski, *Star edge coloring of some classes of graphs*, **J. Graph Theory** 81 (2016), 73 – 83] sú nájdené tesné horné ohraničenia na počet farieb hviezdicových zafarbení pre stromy a subkubické grafy a odvodené horné ohraničenie pre rovinné grafy, ktorých všetky vrcholy ležia na vonkajšej stene. O jej kvalite svedčí, že Scopus na ňu eviduje 31 citácií. Aj ďalšia práca o tejto problematike, [B. Lužar, M. Mockovčiaková, R. Soták, *Note on list star edge-coloring of subcubic graphs*, **J. Graph Theory** 90 (2019), 304 – 310] zaznamenala 10 citácií. Týka sa zoznamovej verzie hviezdicového indexu subkubických grafov; je v nej dokázané, že tento index je najviac 7, čím je zodpovedaná otázka z práce [Z. Dvořák, B. Mohar, R. Šámal, *Star chromatic index*, **J. Graph Theory** 72 (2013), 313 – 326].

V rámci KOKOSu vznikla aj práca [P. Holub, B. Lužar, E. Mihaliková, M. Mockovčiaková, R. Soták, *Star edge-coloring of square grids*, **Applied Mathematics and Computations** 392 (2021) 125741] študujúca hviezdicové zafarbenia štvorcových mriežok.

## 5.17 Homogénne grafové zafarbenia

V posledných rokoch publikoval prof. Madaras (v spoluautorstve so svojimi doktorandmi M. Šurimovou a A. Onderkom) taktiež niekoľko prác súvisiacich s chromatickou teóri-

ou grafov, v ktorých študovali rozličné varianty tzv. homogénnych grafových zafarbení. Ide o vrcholové či hranové zafarbenia (vo všeobecnosti nie nutne regulárne) s dodatočnou podmienkou rovnakého počtu farieb na špecificky vymedzených podgrafoch grafu. Medzi také môžu patriť napr. maximálne hviezdy (a im prislúchajúce zovšeobecnenia bipartitných regulárnych zafarbení, skúmané v prácach [M. Janicová, T. Madaras, R. Soták, B. Lužar: *From NMNR-coloring of hypergraphs to homogenous coloring of graphs*, **Ars Mathematica Contemporanea** 12(2) (2017), 351 – 360] a [T. Madaras, M. Šurimová, *Homogeneous colourings of graphs*, **Mathematica Bohemica** 148(1) (2023), 105 – 115]) či stenové kružnice v rovinných grafoch (pozri [T. Madaras, M. Šurimová, *Facial homogeneous colouring of graphs*, **Symmetry** 13(7) (2021) 1213]). Hranové obmeny týchto zafarbení boli skúmané len veľmi nedávno v [J. Czap, S. Jendroľ, T. Madaras, *Facial visibility in edge colored plane graphs*, **Graphs and Combinatorics** 38(1) (2022) 4] a v [T. Madaras, A. Onderko, T. Schweser, *Edge homogeneous colorings*, **Opuscula Mathematica** 42(1) (2022), 65 – 73].

## 5.18 Zovšeobecnené zafarbenia grafov a dedičné vlastnosti

Jednou z významných tém študovaných v rámci Košického kombinatorického seminára boli dedičné vlastnosti grafov. Ide o systematický prístup k zovšeobecneným zafarbeniam grafov, ktoré sú motivovaného základnou definíciou:

Nech  $G = (V(G), E(G))$  je graf a  $k$  je fixovaná konštanta. Regulárne vrcholové  $k$ -zafarbenie grafu  $G$  je také priradenie farieb z množiny  $1, 2, \dots, k$  vrcholom grafu, pri ktorom susedné vrcholy dostanú rôzne farby.

Každé takéto zafarbenie indukuje rozklad množiny vrcholov  $V(G)$  grafu  $G$  na monochromatické disjunktné podmnožiny. Nijaké dva vrcholy tej istej farby nie sú spojené hranou, preto každá z množín je nezávislá (ňou indukovaný graf je bez hrán). Je prirodzené klásť si otázku, čo sa zmení, ak

vlastnosť „byť nezávislý“ nahradíme nejakou inou špecifickou vlastnosťou.

**Vlastnosťou grafu** nazývame akúkoľvek neprázdnu množinu navzájom neizomorfných grafov. Vlastnosť sa nazýva **dedičná**, ak je uzavretá vzhľadom na tvorbu podgrafov, t. j. s každým grafom patria do dedičnej vlastnosti aj všetky jeho podgrafy. Vlastnosť sa nazýva **aditívna**, ak je uzavretá vzhľadom na disjunktné zjednotenie grafov. Aditívnu a dedičnou vlastnosťou grafov je napríklad množina grafov s maximálnym stupňom  $\Delta$ , zatiaľ čo vlastnosť „byť úplným grafom“ (ľubovoľné dva vrcholy sú spojené hranou) nie je ani dedičná, ani aditívna. Dedičné vlastnosti grafov sa dajú charakterizovať pomocou minimálnych zakázaných podgrafov a maximálnych dovolených grafov, čo umožňuje ďalšie zovšeobecnenia.

Štúdiu dedičných vlastností sa začal venovať P. Mihók už vo svojej dizertačnej práci „*Grafy kritické vzhľadom na svoje charakteristiky*“. Pod jeho vedením vznikla diplomová práca [J. Vronka, *Vertex sets of graphs with prescribed properties*, P.J. Šafárik University, Košice, 1986 (in Slovak)], ktorá je jedným z prvých príspevkov k hypotéze známej ako **Path Partition Conjecture**, ktorá je dodnes vyriešená iba pre špeciálne prípady. Zaujímavosťou je, že táto práca je citovaná v mohých príspevkoch na túto tému. Jedným z košických príspevkov v tejto oblasti je práca [P. Katrenič, G. Semanišin, *A note on the Path Kernel Conjecture*, **Discret. Math.** 309 (2009), 2551 – 2554], ktorá vylepšuje výsledok C. Thomassena.

Podobnej problematike ako P. Mihók sa začal venovať aj Jaroslav Ivančo, ktorý študoval systémy nezávislosti. Na podnet M. Borowieckeho začali pracovať na prvej prehľadovej práci o dedičných vlastnostiach grafov, ktorá nakoniec vyšla iba v oklieštenej verzii: [M. Borowiecki and P. Mihók, *Hereditary properties of graphs*, in: V.R. Kulli, ed., **Advances in Graph Theory** (Vishwa International Publication, Gulbarga, 1991), 41 – 68].

Príkladom výsledku o štruktúre regulárneho zafarbenia je elegantné zovšeobecnenie známej Brooksovej vety [P. Mihók, *An extension of Brooks' theorem*, **Annals of Discrete Math.**

51 (1992), 235 – 236]. Podobný štrukturálny výsledok bol získaný v neskoršej práci [P. Mihók, I. Schiermeyer, *Cycle lengths and chromatic number of graphs*, **Discret. Math.** 286(1-2):(2004), 147 – 149].

V rámci spoločného výskumu vznikla zaujímavá práca o  $k$ -degenerovaných grafoch [M. Borowiecki, J. Ivančo, P. Mihók, G. Semanišin, *Sequences realizable by maximal  $k$ -degenerate graphs* **J. Graph Theory** 19(1):(1995), 117 – 124].

V roku 1995 sa na konferencii v Krakove stretli P. Mihók, Izak Broere a Mieczysław Borowiecki a naštartovali dlhoročnú plodnú spoluprácu troch výskumných skupín z Košíc, Johannesburgu/Pretórie a Zielonej Góry. Prvým spoločným projektom bol prehľadový článok [M. Borowiecki, I. Broere, M. Frick, P. Mihók, G. Semanišin, *A survey of hereditary properties of graphs*, **Discuss. Math. Graph Theory** 17(1): (1997), 5 – 50], ktorý vyšiel spolu s ďalšími prácami v časopise *Discussiones Mathematicae Graph Theory* a má viac ako 100 citácií. Ten bol postupom času zaradený aj do významným prehľadových databáz Current Content, WoS a Scopus. Jednou z tém, na ktoré bol zameraný boli dedičné vlastnosti grafov.

V roku 1998 sa uskutočnil prvý špecializovaný medzinárodný workshop **Hereditarnia** venovaný problematike dedičných vlastností, ktorý sa následne uskutočnil viac ako dvadsaťkrát.

Štúdium štruktúry zväzu dedičných vlastností viedlo postupne k zavedeniu pojmu **minimálne reducibilné ohraničenie**, ktoré umožňuje porovnávať kvalitu jednotlivých výsledkov týkajúcich sa zovšeobecneného zafarbenia. Prvým výsledkom tohoto typu je [M. Borowiecki, I. Broere, P. Mihók, *Minimal reducible bounds for planar graphs*, **Discrete Math.** 212(1-2):(2000), 19 – 27]. O sile a užitočnosti tohto zovšeobecňujúceho prístupu svedčí aj veľmi pekná a zaujímavá práca [M. Borowiecki, I. Broere, P. Mihók, *Minimal reducible bounds for planar graphs*, **Discrete Math.** 21 (2000), 19 – 27], ktorá dáva hlboký a jednotiaci pohľad na celý rád rôznych výsledkov a problémov o planárnych grafoch. Ďalším príspevkom k systematizácii tohoto konceptu je práca [G. Semanišin,

*Minimal reducible bounds for induced-hereditary properties*, **Discret. Math.** **286(1-2): (2004), 163 – 170**].

Tento jednotiaci prístup dovoľuje študovať aj rôzne zovšeobecnené grafové invarianty, ako to urobili P. Mihók a G. Semanišin vo svojom článku [*On invariants of hereditary graph properties*, **Discrete Math.** **307 (2007), 958 – 963**].

V teórii grafov boli študované aj rôzne spôsoby generovania vlastností. Jeden takýto prístup predstavujú aj univerzálne grafy. Z pohľadu dedičných vlastností sú zaujímavé dva príspevky košickej grafárskej školy [P. Mihók, J. Miškuf, G. Semanišin, *On universal graphs for hom-properties*, **Discuss. Math. Graph Theory** **29(2): (2009), 401 – 409**] a [I. Broere, J. Heidema, P. Mihók, *Universality in graph properties with degree restrictions*, **Discuss. Math. Graph Theory** **33(3): (2013), 477 – 492**].

Dedičné vlastnosti grafov je možné kombinovať i s modernejšími spôsobmi farbenia grafov, ako je **zlomkové farbenie**: [A. Kemnitz, P. Mihók, M. Voigt, *Fractional  $(P, Q)$ -total list colorings of graphs*, **Discuss. Math. Graph Theory** **33(1): (2013), 167 – 179**].

## 5.19 Rozklad dedičných vlastností na ireducibilné faktory

Aditívne dedičné vlastnosti tvoria zväz a zovšeobecnené farbenia sa dajú popísať aj algebraickým jazykom: Nech  $P_1, P_2, \dots, P_n$  sú dedičné vlastnosti grafov. Hovoríme, že graf  $G$  má vlastnosť  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , ak jeho množinu vrcholov  $V(G)$  je možné rozložiť na  $n$  množín tak, že podgraf grafu  $G$  indukovaný na  $i$ -tej množine vrcholov má vlastnosť  $P_i$ . Dedičná vlastnosť  $R$  sa nazýva **reducibilná**, ak existujú dedičné vlastnosti  $P_1, P_2, \dots, P_n$  také, že  $R = P_1, P_2, \dots, P_n$ ; inak sa volá **ireducibilná**. Prirodzene tak vznikajú otázky ohľadom jednoznačnosti rozkladu dedičných vlastností na ireducibilné faktory, čo predstavuje analógiu základnej vety algebry a základnej vety aritmetiky. Dva z otvorených problémov sa objavili

aj v renomovanej knihe [T. R. Jensen, B. Toft, *Graph Coloring Problems*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley, New York, 1994, ISBN 0-471-02865-7]. Riešenie jedného z nich sa nachádza v práci [P. Mihók, G. Semanišin, R. Vasky, *Additive and hereditary properties are uniquely factorizable into irreducible factors*, *J. Graph Theory* 33 (2000), 44 – 53]: je dokázané, že faktorizácia reducibilnej vlastnosti na ireducibilné faktory je jednoznačná, ak vlastnosť je aditívna.

Problém rozkladu reducibilných vlastností zaujal A. Farrugi, ktorý rozprúdil diskusiu o viacerých technických a filozofických aspektoch dokázaných tvrdení. Zo vzájomnej spolupráce nakoniec vznikol ešte všeobecnejší výsledok [A. Farrugia, P. Mihók, R. B. Richter, G. Semanišin, *Factorizations and characterizations of induced-hereditary and compositiove properties*, *J. Graph Theory* 49(1): (2005), 11 – 27]. Jeden z recenzentov vo svojej recenzii upozornil, že grafy sú v tejto publikácii už len v motivačnej úlohe a celý prístup sa dá aplikovať aj na všeobecnejšie štruktúry. To je aplikované v článku [P. Mihók, G. Semanišin, *Unique factorization theorem for object-systems*, *Discuss. Math. Graph Theory* 31 (2011), 559 – 575] a tiež v oblasti formálnej conceptovej analýzy [P. Mihók, G. Semanišin, *Unique Factorization Theorem and Formal Concept Analysis*, *CLA 2006*: 232 – 239].

## 5.20 Vybrané problémy algoritmickej teórie grafov

G. Semanišin so svojimi doktorandmi P. Katreničom, F. Galčíkom a J. Katreničom sa neskôr začal venovať aj iným informaticky motivovaným problémom, pričom viackrát bolo pri ich štúdiu možné využiť taktiež poznatky z oblasti dedičných vlastností grafov. Tak vznikli práce [F. Galčík, G. Semanišin, *Maximum Finding in the Symmetric Radio Networks with Collision Detection*, *SOFSEM* (1) (2007), 284 – 294], [F. Galčík, J. Katrenič, G. Semanišin, *On Computing an Optimal Semi-matching*, *Algorithmica* 78(3) (2017), 896 – 913], [J. Katrenič,

I. Schiermeyer, *Improved approximation bounds for the minimum rainbow subgraph problem*, **Inf. Process. Lett.** **111(3)**: (2011), **110 – 114**] a [F. Galčík, J. Katrenič, *A note on approximating the  $b$ -chromatic number*, **Discret. Appl. Math.** **161(7-8)** (2013), **1137 – 1140**].

V rámci slovensko-slovinskej spolupráce vznikla séria prác, ktorá sa týkala  $k$ -cestného vrcholového pokrytia, t. j. nájdenia minimálneho počtu vrcholov v grafe, ktoré treba ofarbiť, aby v zostávajúcom grafe neexistovali nijaké cesty rádu  $k$ . Tento nový pojem úzko súvisí s problematikou návrhov bezpečných komunikačných protokolov v bezdrôtových sieťach.

Veľký ohlas zaznamenala najmä práca [B. Brešar, F. Kardoš, J. Katrenič, G. Semanišin, *Minimum  $k$ -path vertex cover*, **Discret. Appl. Math.** **159(12)** (2011), **1189 – 1195**]. Táto práca doteraz zaznamenala viac ako 140 citácií a v hodnotení Scopus má percentil 97 vo vzťahu k veku a počtu citácií v danej oblasti. Zaujímavosťou je, že je citovaná tak v rámci základného, ako aj aplikovaného výskumu a uplatnenie našla, napr. pri riešení problémov s migráciou alebo COVID-om. Na túto prácu nadväzovalo aj viacero článkov košickej školy, ako [J. Katrenič, *A faster FPT algorithm for 3-path vertex cover*, **Inf. Process. Lett.** **116(4)** (2016), **273 – 278**] a [I. Peterin, G. Semanišin, *Geodesic transversal problem for join and lexicographic product of graphs*, **Comput. Appl. Math.** **41(4)** (2022)].

## 5.21 Problémy Ramseyovského typu

Ako problematika Ramseyovského typu sa vo všeobecnosti zvykne označovať oblasť výskumu v rámci teórie grafov, ktorá študuje existenciu špecificky zafarbených podgrafov v grafoch, ktoré sú (ľubovoľným spôsobom) hranovo zafarbené pomocou istého pevného počtu farieb. Klasický Ramseyov problém rieši otázku minimálneho počtu vrcholov kompletného grafu, ktorý pri ľubovoľnom hranovom 2-zafarbení obsahuje jednofarebnú kópiu vopred určeného menšieho kompletného, resp. všeobecného grafu. Variant tohto problému

uvažuje existenciu kópie určeného menšieho grafu, ktorá je (pri hranovom zafarbení celého zdrojového grafu) dúhová: ľubovoľné dve rôzne hrany kópie majú rôzne farby. V kontexte rovinných grafov sa v práci [S. Jendroľ, J. Miškuf, R. Soták, E. Škrabuláková, *Rainbow faces in edge-colored plane graphs*, **J. Graph Theory** 62 (2009), 84 – 99] študovala otázka najmenšieho počtu farieb v ľubovoľnom hranovom zafarbení rovinného grafu tak, aby sa v rovinnom grafe objavila dúhová stena. Nedávno sa objavila zaujímavá aplikácia týchto výsledkov v doprave, popísaná v článku [T. Tachibara, Y. Hirota, K. Suzuki, K. Tsuritani, H. Hasegawa, *Metropolitan area network model design using regional railways informations for beyond 5G research*, **IEICE Transaction on Communications E106B** (2023), 296 – 306].

Motivovaní horeuvedenou prácou, S. Jendroľ, I. Schiermeyer a J. Tu v práci [*Rainbow numbers for matchings in plane triangulations*, **Discrete Math.** 331 (2014), 158 – 164] navrhli študovať nasledujúci problém Ramseyovho typu: nech  $H$  je planárny graf a  $\mathcal{D}$  je nejaká množina planárnych grafov. Nech  $rb(\mathcal{D}, H)$  je najmenší počet  $r$  farieb taký, že ak  $H$  je podgrafom nejakého planárneho grafu  $G \in \mathcal{D}$ , tak akékoľvek hranové zafarbenie grafu  $G$  pomocou  $r$  farieb obsahuje dúhovo zafarbenú kópiu grafu  $H$ . V uvedenej práci autori našli ohraničenia pre  $rb(\mathcal{D}, H)$ , kde ako množinu  $\mathcal{D}$  zvolili množinu rovinných  $n$ -vrcholových triangulácií a za  $H$  zvolili množinu  $k$  hrán takú, že žiadne dve jej hrany nemajú spoločný vrchol (t. j. spárenie). Následne v práci [M. Horňák, S. Jendroľ, I. Schiermeyer, R. Soták, *Rainbow Numbers for Cycles in Plane Triangulations*, **Journal of Graph Theory** 78 No. 4 (2015), 248 – 257] autori iniciovali štúdium dúhových kružníc v hranovo zafarbených rovinných trianguláciách na  $n$  vrcholoch (t. j. prípad, kde graf  $H$  je kružnica na  $k$  vrcholoch). Databáza Scopus udáva na obe spomínané práce spolu 44 citácií.

Táto problematika sa rýchlo ujala: v práci [Z. Qin, Y. Lan, Y. Shi, J. Yue, *Exact rainbow numbers for matching in plane triangulations*, **Discrete Math.** 344 (2021) 112301] je presne určená hodnota  $rb(\mathcal{D}, H)$  kde je  $\mathcal{D}$  množina rovinných  $n$ -



vrcholových rovinných triangulácií a  $H$  je spárenie tvorené  $k$  hranami. Prehľadový článok [Z. Qin, Y. Lan, Y. Shi, J. Yue, *Long rainbow paths and rainbow cycles in edge colored graphs – A survey*, **Appl. Math. Comput.** **317** (2018), 187 – 192] a čerstvé práce [Y. Li, H. Lin, X. Hu, *Anti-Ramsey number for cycles in  $n$ -prisms*, **Discrete Appl. Math.** **322** (2022), 1 – 8], [Z. Jin, R. Yu, Y. Sun, *Anti-Ramsey number of matching in outerplanar graphs*, **Discrete Appl. Math.** **345** (2024), 125 – 135] ukazujú, že je stále živá.

Aj vrcholová verzia spomenutého problému o dúhovej stene je dobre preštudovaná. S. Jendroľ so spoluautormi v článku [Z. Dvořák, S. Jendroľ, D. Král, G. Pap, *Matching and non-rainbow colorings*, **SIAM J. Discrete Math.** **33** (2009), 344 – 348] ukázali (popri iných výsledkoch), že maximálny počet farieb, ktorý môže byť použitý vo vrcholovom zafarbení kubického 3-súvislého rovinného  $n$ -vrcholového grafu  $G$ , ktorý neobsahuje dúhovú stenu, je rovný  $\frac{n}{2} + \mu - 2$ , kde  $\mu$  je počet hrán v maximálnom spárení duálneho grafu  $G^*$  ku grafu  $G$ .

## 5.22 Ohodnotenia grafov

Problematika ohodnotení grafov sa na KOKOSE študovala od 80. rokov minulého storočia M. Trenklerom (magické ohodnotenia), J. Ivančom (magické a supermagické ohodnotenia), S. Jendroľom a M. Tkáčom (iregulárna sila grafov).

Najúspešnejšími kolegami pri štúdiu ohodnotení grafov boli prof. M. Bača a doc. A. Feňovčíková (v súčasnosti pôsobiaci na Technickej Univerzite v Košiciach). Obaja sa venujú štúdiu vlastností rôznych typov grafových ohodnotení. Ide o priradovanie prirodzených čísel prvkom grafu (vrcholom, hranám a v prípade rovinných grafov aj stenám) tak, aby boli splnené isté váhové podmienky pre funkcie agregujúce hodnoty prvkov. Vzhľadom na typ váhových podmienok rozlišujeme viaceré ohodnotenia: graciózne, magické, supermagické, antimagické, iregulárne a rôzne ich modifikácie a zovšeobecnenia. Počas svojej vedecko-výskumnej práce sa M. Bača

a A. Feňovčíková úspešne zapojili do riešenia grantových projektov na PF UPJŠ a rozbehli tiež širokú medzinárodnú spoluprácu s rôznymi zahraničnými univerzitami, kde sa venujú problematike grafových ohodnotení, napr. Newcastle a Ballarat (Austrália), Bandung a Jakarta (Indonezia), Tamil Nadu a Chennai (India), Lahore a Faisalabad (Pakistan), Taichung (Taiwan), Jazan a Riyadh (Saudská Arábia), Al Ain (Spojené Arabské Emiráty), Morrow a Georgetown (USA), Castelldefels a Barcelona (Španielsko), Ostrava a iné.

### 5.22.1 *Magické grafy*

Z histórie matematiky je dobre známa a dôkladne študovaná problematika magických štvorcov – číselných schém, v ktorých sú čísla  $1, \dots, n^2$  rozmiestnené do štvorca  $n \times n$  tak, že súčty v riadkoch a stĺpcoch sú rovnaké. Každému takémuto štvorcovi možno priradiť ohodnotený kompletný bipartitný graf  $K_{n,n}$ , v ktorom pre každý vrchol platí, že súčet ohodnotení hrán s ním incidentných je vždy rovnaký (obrátene, každý takto ohodnotený graf  $K_{n,n}$  zodpovedá magickému štvorcovi). Na základe tohto pozorovania môžeme sformulovať nasledujúcu definíciu: súvislý graf  $G$  je **magický**, ak jeho hrany je možné ohodnotiť rôznymi kladnými reálnymi číslami tak, aby súčty týchto ohodnotení pri každom vrchole boli rovnaké (ich spoločná hodnota sa nazýva **magický index**). Štúdium magických grafov otvoril J. Sedláček Problémom 27, ktorý je uvedený v zborníku [*Theory of graphs and its applications*, **Proc. Symp. Smolenice 1963**, 163 – 167]; úlohou je rozhodnúť, či daný graf  $G$  je magický. V 70-tych rokoch minulého storočia sa táto oblasť výskumu grafov tešila značnému záujmu. M. Trenklerovi a jeho diplomantovi S. Jeznému sa podaril husársky kúsok: našli nutnú a postačujúcu podmienku nato, aby nejaký graf bol magický, pozri [S. Jezný, M. Trenkler, *Characterization of magic graphs*, **Czech. Math. Journal** **33** (108) (1983), 435 – 438]. V ďalšom období M. Trenkler pokračoval v štúdiu štruktúry magických grafov aj v prácach [*Magic  $p$ -dimensional cubes*, **Acta Arithmetica** **96** (2001), 364 – 175]

a [*Supermagic complete  $k$ -partite hypergraphs*, **Graphs Comb**, **17** (2001), 171 – 175].

Na podnet M. Trenklera sa J. Ivančo začal tiež venovať ohodnoteniam grafov. Nosnou témou jeho výskumu sa stali **supermagické grafy**, t. j. grafy, ktorých hrany je možné ohodnotiť navzájom rôznymi po sebe idúcimi prirodzenými číslami tak, že súčty ohodnotení hrán incidentných s daným vrcholom nezávisia od výberu vrchola. V porovnaní s magickými grafmi ide o oveľa zložitejšiu problematiku, doteraz nie je známa ani ich charakterizácia. V práci [J. Ivančo, *On supermagic regular graphs*, **Math. Bohem.** **125** (2000), 99 – 114] sú charakterizované supermagické regulárne kompletne multipartitné grafy. Článok [S. Dražnová, J. Ivančo, A. Semaničová, *Number of edges in supermagic graphs*, **J. Graph Theory** **52** (2006), 15 – 26] je venovaný odhadom pre maximálne resp. minimálne počty hrán v supermagických grafoch; v práci [J. Ivančo, A. Semaničová, *Some constructions of supermagic graphs using antimagic graphs*, **SUT J. Math.** **42** (2006), 177 – 186] je popísané využitie antimagických grafov pri konštrukcii supermagických grafov.

J. Ivančo neskôr spolu so svojou doktorandkou Ľ. Bezegovou definovali a popísali vlastnosti stupňovo magických grafov, ktoré sú zovšeobecnením regulárnych supermagických grafov (pozri [Ľ. Bezegová, J. Ivančo, *An extension of regular supermagic graphs*, **Discrete Math.** **310** (2010), 3571 – 3578] a [J. Ivančo, Ľ. Bezegová, *Number of edges in degree-magic graphs*, **Discrete Math.** **313** (2013), 1349 – 1357]).

### 5.22.2 Iregulárne ohodnotenia

Postupnosť stupňov vrcholov grafu je jednou zo základných a prirodzene študovaných grafových charakteristík. Jej rôznorodosť obmedzuje známe tvrdenie (dnes už súčasť grafového „folklóru“), že neexistuje konečný graf, ktorého stupne vrcholov by boli navzájom rôzne. Oproti tomu je jednoduché skonštruovať **iregulárne multigrafy** s napospol rôznymi stupňami vrcholov. Navyše je možné každý jednoduchý graf  $G$  „ire-

gularizovať", t. j. premeniť ho pridaním dodatočných hrán na iregulárny multigraf  $G'$ ; minimum z multiplicití takto získaných multigrafov  $G'$  definuje tzv. **iregulárnu silu**  $G$  (definovanú Chartrandom a kol. v roku 1988). Multiplicity násobných hrán v  $G'$  možno potom chápať ako hodnoty priradené hranám pôvodného grafu  $G$  – takto získané ohodnotenie indukuje napospol rôzne súčty hodnôt hrán pri každom vrchole. Motivovaní prácami o iregulárnej sile grafu M. Bača, S. Jendroľ, M. Miller a J. Ryan začali skúmať totálnu hranovú iregulárnu silu grafu ako invariant ku iregulárnej sile pre totálne ohodnotenia. V práci [M. Bača, S. Jendroľ, M. Miller, J. Ryan, *On irregular total labellings*, **Discrete Math.** **307** (2007), **1378 – 1388**] zaviedli pojem totálnej váhy vrchola (resp. hrany) ako súčtu hodnoty priradenej vrcholu (resp. hrane) a hodnôt priradených hranám (resp. vrcholom) incidentným s vrcholom (resp. s hranou). Potom totálne ohodnotenie je iregulárne, ak váhy rôznych vrcholov (resp. hrán) sú rôzne; totálna vrcholová (resp. hranová) iregulárna sila  $tvs(G)$  (resp.  $tes(G)$ ) grafu  $G$  je definovaná ako minimálna hodnota z najväčších hodnôt hrán spomedzi všetkých možných iregulárnych ohodnotení. Spomínaní autori stanovili dolné a horné hranice pre tieto grafové invarianty a pre niektoré triedy grafov (úplne grafy, prizmy, hviezdy, cesty, cykly, kolesá a grafy priateľstva) uviedli presné hodnoty, ktoré dokazovali tesnosť dolných hraníc. Práca zaujala mnohých odborníkov pracujúcich v tejto oblasti a podnietila ich výskum v hľadaní lepších horných ohraničení pre dané invarianty a určenie ich presných hodnôt pre ďalšie triedy grafov. Doteraz je na túto prácu evidovaných 414 citácií podľa Google Scholar, resp. 217 (vo Web of Science).

So značným záujmom sa stretli aj práce J. Ivanča a S. Jendroľa [*Total edge irregularity strength of trees*, **Discuss. Math. Graph Theory** **26** (2006), **449 – 456**] (viac ako 50 citácií) a S. Jendroľa, J. Miškufa, R. Sotáka [*Total edge irregularity strength of complete graphs and complete bipartite graphs*, **Discrete Math.** **310** (2010), **400 – 407**] (citovaná viac ako 35-krát).

A. Feňovčíková a M. Bača ďalej pokračujú v štúdiu iregulárnych ohodnotení grafov a ich rôznych modifikácii. A. Ahmad,

O. B. S. Al-Mushayt a M. Bača v práci [A. Ahmad, O. B. S. Al-Mushayt, M. Bača, *On edge irregularity strength of graphs*, **Applied Mathematics and Computation** **243** (2014), 607 – 610] definovali hranovú verziu iregulárnej sily. V práci [M. Bača, S. Jendroľ, K. Kathiresan, K. Muthugurupackiam, *Entire labeling of plane graphs*, **Applied Mathematics & Information Sciences** **9** No. 1 (2015), 263 – 267] autori ďalej definovali stenovú verziu iregulárnych ohodnotení (a zodpovedajúci invariant, úplnú stenovú iregulárnu silu). V prehľadovom článku [M. Bača, S. Jendroľ, K. Kathiresan, K. Muthugurupackiam, A. Semaničová-Feňovčíková, *A survey of irregularity strength*, **Electronic Notes in Discrete Mathematics** **48** (2015), 19 – 26] sú uvedené známe výsledky o hranových, vrcholových, totálnych a stenových iregulárnych silách grafov.

F. Ashraf a kol. v práci [F. Ashraf, M. Bača, Z. Kimáková, A. Semaničová-Feňovčíková, *On vertex and edge  $H$ -irregularity strength of graphs*, **Discrete Math. Algorithms and Appl.** **8** (4) (2016) 13 pages] zaviedli pojem vrcholovej a hranovej  $H$ -iregulárnej sily ako invariantu vrcholových alebo hranových ohodnotení, pri ktorých sa rozlišujú váhy všetkých podgrafov izomorfných s predpísaným podgrafom  $H$ . V spolupráci so spoluriešiteľmi z Pakistanu, Saudskej Arábie a Spojených Arabských Emirátov boli taktiež definované modulárne verzie hranovej, vrcholovej a totálnej iregulárnej sily v prácach [M. Bača, M. Imran, A. Semaničová-Feňovčíková, *Irregularity and Modular Irregularity Strength of Wheels*, **Mathematics** **9** No. 21 (2021) 2710, 14 pages], [G. Ali, M. Bača, M. Lascsáková, A. Semaničová-Feňovčíková, A. A. Loqaily, N. Mlaiki, *Modular total vertex irregularity strength of graphs*, **AIMS Mathematics** **8** No. 4 (2023), 7662 – 7671], [A. N. A. Koam, A. Ahmad, M. Bača, A. Semaničová-Feňovčíková, *Modular edge irregularity strength of graphs*, **AIMS Mathematics** **8** No. 1 (2023), 1475 – 1487].

### 5.22.3 Antimagické grafy

Ďalšia téma, ktorá vzbudila záujem o výskum, sa týka **anti-magických grafov**; sú to grafy, ktorých hrany možno ohodnotiť číslami  $1, 2, \dots, m$  (kde  $m$  je počet hrán) tak, že súčty hodnôt hrán so spoločným vrcholom sú pre každý vrchol rôzne. Tento pojem zaviedli N. Hartsfield a G. Ringel v knihe [N.Hartsfield, G.Ringel, *Pearls in Graph Theory*, **Academic Press, Inc., Boston, 1990 (Revised version 1994)**] a formulovali hypotézu, že každý súvislý graf (s výnimkou cesty na dvoch vrcholoch) je antimagickým. Táto hypotéza je stále otvorená, aj keď pre niektoré špeciálne triedy grafov bola jej platnosť dokázaná. Napr. N. Alon a kol. v práci [N. Alon, G. Kaplan, A. Lev, Y. Roditty, R. Yuster, *Dense graphs are antimagic*, **J. Graph Theory** **47** (2004), 297 – 309] použitím pravdepodobnostných techník analytickej teórie čísel ukázali, že táto hypotéza je pravdivá pre všetky grafy s dostatočne veľkým minimálnym stupňom (rádu logaritmu počtu vrcholov), resp. grafy, ktoré majú univerzálny či sub-univerzálny vrchol. V práci [S. Arumugam, K. Premalatha, M. Bača, A. Semaničová-Feňovčíková, *Local antimagic vertex coloring of a graph*, **Graphs Combin.** **33** (2017), 275 – 285] a nezávisle v [J. Bensmail, M. Senhaji, K. Szabo Lyngsie, *On a combination of the 1-2-3 conjecture and the antimagic labelling conjecture*, **Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.** **19** (2017)] autori zaviedli lokálne antimagické ohodnotenie ako lokálnu verziu Hartsfieldovho a Ringelovho pojmu antimagického ohodnotenia (t. j. vrcholové váhy sú rôzne pre každú dvojicu susedných vrcholov). Stanovili hypotézu, že každý súvislý graf okrem cesty na dvoch vrcholoch má lokálne antimagické ohodnotenie.

J. Haslegrave v práci [J. Haslegrave, *Proof of a local antimagic conjecture*, **Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.** **20** (2018)] dokázal platnosť tejto hypotézy pomocou pravdepodobnostných metód. Táto téma sa stala zaujímavá a podnietila záujem o ďalší výskum. Článok [S. Arumugam, K. Premalatha, M. Bača, A. Semaničová-Feňovčíková, *Local antimagic vertex coloring of a graph*, **Graphs Combin.** **33** (2017), 275 – 285] má

doteraz evidovaných 159 citácií (Google Scholar), resp. 65 (podľa Web of Science). Naviac v danom článku autori poukázali na to, že každé lokálne antimagické ohodnotenie indukuje regulárne vrcholové zafarbenie grafu  $G$ , kde vrcholová váha je farbou daného vrchola. To prirodzene vedie k pojmu **lokálneho antimagického chromatického čísla** definovaného ako minimálny počet farieb počítaný cez všetky zafarbenia grafu  $G$ , ktoré sú indukované lokálnymi antimagickými ohodnoteniami. Autori dokázali, že každý strom s  $t$  listami má lokálne antimagické chromatické číslo aspoň  $t + 1$ .

V práci [S. Arumugam, Y. C. Lee, K. Premalatha, T. M. Wang, *On local antimagic vertex coloring for corona products of graphs*, **arXiv 1808.04956**, Aug. 15 (2018)] bola stanovená hypotéza, že pre každý strom s  $t$  listami je lokálne antimagické chromatické číslo aspoň  $t + 1$  a najviac  $t + 2$ . V práci [M. Bača, A. Semaničová-Feňovčíková, R. T. Lai, T. M. Wang, *On Local Antimagic Vertex Coloring for Complete Full  $t$ -ary Trees*, **Fundamenta Informaticae 185 No. 2 (2022), 99 – 113**] je dokázané, že pre úplné  $t$ -árne stromy,  $t$  nepárne, je lokálne antimagické chromatické číslo presne  $t + 1$ . Len nedávno bolo publikovaných niekoľko prác, ktoré dokazujú platnosť predošlej hypotézy pre špeciálne triedy stromov.

N. Bong a kol. v práci [N. Bong, M. Bača, A. Semaničová-Feňovčíková, K. A. Sugeng, T. M. Wang, *Local face antimagic evaluations and coloring of plane graphs*, **Fundamenta Informaticae 174 (2020), 103 – 119**] zaviedli pojem **lokálne stenového antimagického ohodnotenia** typu  $(a, b, c)$  pre 2-súvislé rovinné grafy a nový grafový invariant – lokálne stenové antimagické chromatické číslo typu  $(a, b, c)$ . Zatiaľ poznáme ohraničenia tohto grafového invariantu a jeho presné hodnoty pre isté triedy 2-súvislých rovinných grafov. Téma je aktuálnou výzvou pre ďalšiu prácu.

Ďalšie výsledky a vzájomné vzťahy medzi rôznymi typmi antimagických ohodnotení možno nájsť v prehľadovom článku [M. Bača, E. T. Baskoro, L. Brankovic, S. Jendroľ, Y. Lin, O. Phanalasy, J. Ryan, A. Semaničová-Feňovčíková, Slamin, K. A. Sugeng, *A survey of face antimagic evaluation of graphs*,

**Australasian Journal of Combinatorics** 69 No. 3 (2017), 382 – 393] a tiež v dvoch monografiách [M. Bača, M. Miller, *Super Edge-Antimagic Graphs*, **Brown Walker Press, Boca Raton, 2008**] a [M. Bača, M. Miller, J. Ryan, A. Semaničová-Feňovčíková, *Magic and Antimagic Graphs, Attributes, Observations, and Challenges in Graph Labelings*, **Springer Nature Switzerland AG, Cham, 2019**].

## 5.23 Aplikácie teórie grafov pri ochrane a bezpečnosti komunikačných sietí

Reálnu komunikačnú sieť môžeme modelovať grafmi nasledovne: uzlom siete priradíme vrcholy grafu a komunikačným linkám medzi uzlami hrany spájajúce príslušné vrcholy. Výmena informácií medzi uzlami siete potom prebieha – v jej grafovom modeli – pozdĺž nejakých ciest spájajúcich vrcholy priradené uzlom. Pre zaručenie bezpečnej výmeny informácií od jedného uzla k inému je potrebné chrániť komunikačné kanály transportu informácie kľúčmi a heslami; rozumnou požiadavkou zabezpečenia je existencia takej komunikačnej cesty, v rámci ktorej sú všetky kľúče/heslá rôzne (kvôli zamedzeniu vonkajšiemu útoku na základe opätovného použitia uniknutého hesla). Situáciu teda môžeme modelovať pomocou zafarbenia hrán (farby predstavujú heslá), pričom žiadame, aby pre každú dvojicu vrcholov existovala rôznofarebná (t. j. dúhová) cesta, ktorá ich spája. Toto možno jednoducho dosiahnuť, ak sa každej hrane priradí rôzna farba; kvôli redukcii nákladov na manažment hesiel a celého zabezpečenia nás však skôr zaujíma minimálny počet farieb, pre ktorý existuje hranové zafarbenie s požadovanou vlastnosťou **dúhovej konexie** medzi každými dvomi vrcholmi.

Ako prví si tieto skutočnosti uvedomili G. Chartrand, G. I. Johns, K. A. McKeon a P. Zhang v dnes už klasickej a vysokocitovanej práci [*Rainbow connection in graphs*, **Math. Bohem.** 133 (2008), 85 – 98]. V nadväznosti na ňu začali S. Jendroľ, C. Brause a I. Schiermeyer v [*Odd connection and odd*



*vertex-connection of graphs*, **Discrete Math.** **341** (2018), 3500 – 3512] študovať všeobecný teoretický meta-koncept nazvaný  $\mathcal{D}$ -súvislosť. V ňom vychádzame z množín slov vytvorených z prvkov-písmen konečnej abecedy  $A$  (môžu to byť farby-čísla, resp. iné objekty). Tieto slová môžu mať rôzne vlastnosti: napr. slovo sa nazýva **vlastné**, ak každé dve jeho susedné písmená sú rôzne; je **dúhové**, ak všetky jeho písmená sú navzájom rôzne; je **nepárne**, ak každé v ňom použité písmeno sa vyskytuje nepárny počet krát; je **bezkonfliktné**, ak nejaké písmeno sa v ňom vyskytuje práve raz; je **dynamické** (angl. loose), ak sú v ňom použité aspoň tri rôzne písmená, a je **monochromatické**, ak všetky písmená v ňom sú rovnaké. Nech teraz  $\mathcal{D}$  je nejaká vlastnosť slov,  $G$  je súvislý graf a nech  $c$  je zafarbenie jeho hrán (resp. jeho vrcholov). Ak medzi každými dvomi jeho vrcholmi existuje zafarbená cesta (chápaná ako slovo), ktorá má vlastnosť  $\mathcal{D}$ , tak graf sa nazýva  $\mathcal{D}$ -súvislý (resp. vrcholovo  $\mathcal{D}$ -súvislý). Minimálny počet farieb potrebných na zafarbenie hrán (resp. vrcholov)  $G$  tak, aby bol  $\mathcal{D}$ -súvislý (resp. vrcholovo  $\mathcal{D}$ -súvislý) sa nazýva číslo  $\mathcal{D}$ -súvislosti (resp. číslo vrcholovej  $\mathcal{D}$ -súvislosti).

J. Czap, S. Jendroľ a J. Valiska prišli v práci [*Conflict-free connection of graphs*, **Discuss. Math. Graph Theory** **40** (2020), 51 – 65] s konceptom bezkonfliktných ciest. Ten sa veľmi rýchle ujal (ešte pred uverejnením v časopise) a následne vzniklo niekoľko prác, ktoré ho rozvíjali; jednou z nich je práca [H. Chang, T. D. Doan, Z. Huang, S. Jendroľ, X. Li, I. Schiermeyer, *Graphs with conflict-free connection number two*, **Graphs and Combin.** **34** (2018), 1553 – 1563]. S. Jendroľ spolu s nemeckými kolegami C. Brausem a I. Schiermeyerom uverejnili nedávno dve práce, ktoré riešia situácie, keď  $\mathcal{D}$  je vlastnosť byť dynamické slovo, resp. viacfarebné, či inak zaujímavé slovo: [*From colorful to rainbow path in graphs: Colouring the vertices*, **Graphs Combin.** **37**(5) (2021), 1823 – 1839] a [*Loose edge-connection of graphs*, **Graphs Combin.** **39**(4) (2023), 79].

## 5.24 Priesečníkové čísla grafov

Ak je graf planárny, tak ho možno znázorniť v rovine tak, že žiadne dve jeho hrany sa nepretnú. Ak to možné nie je, tak sú vynútené pretínania niektorých hrán; v nakresleniach grafu tak vznikajú priesečníky (body roviny, v ktorých sa pretnú práve dve hrany). **Priesečníkové číslo grafu** je potom rovné najmenšiemu počtu priesečníkov, ktoré sa v diagrame grafu musia vyskytnúť. Záujem vedeckej komunity o presné hodnoty priesečníkových čísel grafu je spojený nielen so snahou vytvárať čitateľné a zrozumiteľné vizualizácie rôznych schém, ale tiež napríklad s minimalizáciou rozmerov mikročipov, tzv. problematikou VLSI-obvodov (Very-large-scale integration).

Priesečníkovým číslam grafov sme sa v Košiciach začali venovať na začiatku osemdesiatych rokov. Motiváciou boli dva čerstvé pilotné vedecké články – prvý od L. W. Beinekeho a R. D. Ringeisena [*On the crossing numbers of products of cycles and graphs of order four*, **J. Graph Theory** **4** (1980), 145 – 155] a druhý od S. Jendroľa a M. Ščerbovej [*On the crossing numbers of  $S_m \times P_n$  and  $S_m \times C_n$* , **Časopis pro pěstování matematiky** **107** (1982), 225 – 230].

Veľmi úspešným členom Košickej skupiny diskkrétnej matematiky pri štúdiu tejto problematiky bol Marián Klešč. Vo svojich prácach [M. Klešč, *On the crossing numbers of Cartesian products of stars and paths or cycles*, **Math. Slovaca**, **41** (1991), 113 – 120], [M. Klešč, *The crossing numbers of products of paths and stars with 4-vertex graphs*, **J. Graph Theory** **18** (1994), 605 – 614] nadviazal na výsledky L. W. Beinekeho a R. D. Ringeisena ako aj S. Jendroľa so M. Ščerbovou tým, že skompletizoval informácie o presných hodnotách priesečníkových čísel karteziánskych súčinov všetkých 4-vrcholových súvislých grafov s ľubovoľnou cestou, kružnicou a hviezdou. Následne so spoluautormi [M. Klešč, R. B. Richter, I. Stobert, *The crossing number of  $C_5 \times C_n$* , **J. Graph Theory**, **22** (1996), 239 – 243] rozšíril platnosť hypotézy L. W. Beinekeho a R. D. Ringeisena, že priesečníkové číslo karteziánskeho súčinu dvoch kružníc

$C_m \times C_n$  je  $n(m - 2)$  pre každé  $n$  väčšie alebo rovné  $m$ . Tí ju vo svojom článku z roku 1980 dokázali pre  $m = 4$ ; M. Klešč, R. B. Richter a I. Stobert posunuli hodnotu  $m$ , pre ktorú hypotéza platí na 5. Hypotéza je dodnes otvorená pre hodnoty  $m \geq 7$ . V prvej dekáde 21. storočia M. Klešč spolu so svojimi spolupracovníkmi publikoval viacero prác, v ktorých boli určené presné hodnoty priesečníkových čísel karteziánskych súčinov vybraných 5-, 6- a 7-vrcholových grafov s ľubovoľne veľkými cestami, kružnicami, resp. hviezdami.

Začiatkom 21. storočia D. Bokal zo Slovinska (v tom čase doktorand na Univerzite v Ljubljane) rozpracoval teóriu tzv. **zip-súčinu** grafov (ktorá umožnila vypočítať presné hodnoty priesečníkového čísla špecifických grafov); nevedel však nájsť vhodný graf na aplikáciu získaných výsledkov. Spolu s M. Kleščom našli použiteľný graf – bol to graf karteziánskeho súčinu  $S_m \times P_n$ . Hypotéza pre hodnotu priesečníkového čísla tohto grafu bola publikovaná už v práci S. Jendroľa a M. Ščerbovej v roku 1982. D. Bokal v [On the crossing numbers of Cartesian products with paths, **J. Combin. Theory Ser. B** 97 (2007), 381 – 384] dokázal jej platnosť. Bol to prvý graf karteziánskeho súčinu dvoch ľubovoľne veľkých grafov, pre ktorý bola presne určená hodnota jeho priesečníkového čísla. Neskôr M. Klešč využil vlastnosti zip-súčinu a určil presné priesečníkové čísla karteziánskych súčinov pre viaceré dvojice ľubovoľne veľkých grafov. K najvýznamnejším prácam z tejto problematiky možno zarátať: [M. Klešč, Š. Schrötter, On the crossing numbers of Cartesian products of stars and graphs of order six, **Discuss. Math. Graph Theory** 33 (2013), 583 – 597], [M. Klešč, J. Petrillová, M. Valo, On the crossing numbers of Cartesian products of wheels and trees, **Discuss. Math. Graph Theory** 37 (2017), 399 – 413], [Z. Su, M. Klešč, Crossing numbers of  $K_{1,1,4,n}$  and  $K_{1,1,4} \times T$ , **Ars Combinatoria** 148 (2020), 137 – 148].

V práci [M. Klešč, The join of graphs and crossing numbers, **Electronic Notes in Discrete Math.** 28 (2007), 349 – 355] boli po prvýkrát skúmané priesečníkové čísla špeciálneho súčinu grafov, známeho ako **spojenie** (angl. join) **grafov**. Práca

vzbudila veľký ohlas a do roku 2023 databáza Scopus registruje na ňu 50 citácií. Tento článok, ako aj publikácie [M. Klešč, *The crossing numbers of join of the special graph on six vertices with path and cycle*, **Discrete Math.** **310** (2010), 1475 – 1481], [M. Klešč, Š. Schrötter, *The crossing numbers of join products of paths with graphs of order four*, **Discuss. Math. Graph Theory** **31** (2011), 321 – 331], boli motiváciou pre naštartovanie výskumu priesečníkových čísel spojení grafov. Významný posun v skúmaní priesečníkových čísel joinov grafov inicioval M. Klešč v spolupráci s M. Stašom, keď podrobnejšie rozpracovali metódu tzv. cyklických permutácií (ktorú prvýkrát použil D. Kleitman v roku 1970 na určenie priesečníkového čísla kompletného bipartitného grafu  $K_{5,n}$ ). Metóda umožňuje veľmi efektívne – iba využitím kombinatorických vlastností cyklických permutácií – určovať priesečníkové čísla grafov, ktoré ako podgraf obsahujú kompletný bipartitný graf. Spomínané výsledky je možné nájsť v prácach [M. Klešč, M. Staš, *Cyclic permutations in determining crossing numbers*, **Discuss. Math. Graph Theory** **42** (2022), 1163 – 1183], [M. Klešč, M. Staš, J. Petrillová, *The crossing numbers of join of special disconnected graph on five vertices with discrete graphs*, **Graphs and Combinatorics** **38** (2022) art. 35] a vo viacerých ďalších prácach M. Staša.

Okrem už spomínaných súčinov grafov (karteziánsky súčin resp. spojenie grafov), M. Klešč dosiahol nové výsledky aj pre hodnoty priesečníkových čísel grafov získaných odlišnými spôsobmi. Takéto výsledky je možné nájsť napríklad v prácach [S. Jendroľ, M. Klešč, *On graphs whose line graphs have crossing number one*, **J. Graph Theory** **37** (2001), 181 – 188], [M. Klešč, J. Petrillová, M. Valo, *Minimal number of crossings in strong product of paths*, **Carpathian J. Math.** **29** (2013), 27 – 32].

## 5.25 Aplikácie grafov v sociálnych a komplexných sieťach

Jednou z aplikácií teórie grafov, ktorá nepochybne zásadným spôsobom ovplyvnila modernú spoločnosť v rozličných aspektoch (komunikácia, internet a WWW, médiá, ekonomické vzťahy, politika a i.) sú sociálne resp. všeobecne komplexné siete. Štúdium vlastností grafov reálnych systémov spojené s interpretáciou zistení vo svetle praxe (obvykle s cieľom zlepšiť správanie sa modelovaného systému) zaznamenáva v posledných dvoch dekádach expanziu nielen interdisciplinárne ladených publikácií, ale i výstupov z oblasti „čistej“ teórie grafov. Na pôde KOKOSu sa touto problematikou zaoberal T. Madaras spolu s doktorandkou J. Coroničovou Hurajovou. Tri z jeho prác ([S. Gago, J. Hurajová, T. Madaras, *Notes on the betweenness centrality of a graph*, **Mathematica Slovaca** **62(1)**, (2012), 1 – 12], [S. Gago, J. Coroničová Hurajová, *On betweenness-uniform graphs*, **Czechoslovak Mathematical Journal** **63(3)** (2013), 629 – 642] a [T. Madaras, J. Coroničová Hurajová, *More on betweenness-uniform graphs*, **Czechoslovak Mathematical Journal** **68(2)** (2018), 293 – 306]) sú venované tzv. **medziláhlostnej centralite** – významnému a v praxi široko používanému indexu, ktorý kvantitatívne vyjadruje pozíciu aktéra v rámci celej siete (vyššie hodnoty korelujú s jeho väčšou dôležitosťou a dosahom); skúmali sa v nich odhady daného invariantu vzhľadom na rozličné parametre grafu, vlastnosti grafov, ktorých vrcholy majú rovnakú hodnotu tohto invariantu a ich netriviálne konštrukcie. Podobné výsledky o hranovej analógii tohto indexu centrality boli nedávno publikované v [J. Coroničová Hurajová, T. Madaras, D. A. Narayan, *Characterizing edge betweenness-uniform graphs*, **Theory and Applications of Graphs** **9(1)** (2022) 5]. Rozličné získané výsledky o medziláhlostnej centralite boli taktiež zhrnuté (v spoluautorstve so S. Gago a J. Coroničovou Hurajovou) do kapitoly *Betweenness centrality in graphs* v monografii [*Quantitative Graph Theory: Mathematical Foundations and Applications* (M. Dehmer, F. Emmert-Streib Eds., CRC Press, 2014)].

## 5.26 Dimenzie grafov

Kompletný  $n$ -vrcholový graf si môžeme predstaviť ako  $n$ -rozmerný simplex – konvexný mnohosten v euklidovskom priestore  $\mathbb{R}^n$ , ktorého každé dva vrcholy vytvárajú hranu jednotkovej dĺžky. Keďže každý graf je podgrafom nejakého kompletného grafu, existuje minimálny rozmer euklidovského priestoru, v ktorom možno realizovať daný graf tak, aby všetky jeho hrany boli úsečky jednotkovej veľkosti; jeho hodnota je tzv. **dimenzia grafu**. Túto problematiku skúmal v rámci Košickej školy T. Madaras spolu so svojim doktorandom P. Śiroczkim. Dosiahnuté výsledky z ich spoločnej práce [T. Madaras, P. Śiroczki, *On the dimension of Archimedean solids*, **Opuscula Mathematica** 34(1) (2014), 123 – 138] ukazujú, že niektoré archimedovské trojrozmerné mnohosteny možno kombinatoricky realizovať nielen „standardnými modelmi“ v  $\mathbb{R}^3$ , ale aj ako jednotkové nakreslenia v rovine (pre viaceré mnohosteny však takáto realizácia v rovine možná nie je); konštrukcie takýchto nakreslení využívali netriviálny aparát teórie funkcií viacerých premenných. Zložitost problému charakterizácie grafov dimenzie 2 podčiarkuje tiež práca [T. Madaras, P. Śiroczki, *Minimal graphs with respect to geometric distance realizability*, **Discussiones Mathematicae Graph Theory** 41(1) (2021), 65 – 73], kde je dokázané, že v zásade existuje – pre dostatočne veľký pevný počet vrcholov – exponenciálne mnoho grafov, ktoré nemajú v rovine jednotkové nakreslenie, ale všetky ich vlastné podgrafy takéto nakreslenie majú. Doplnkom k výskumu tejto problematiky je aj práca [P. Hudák, T. Madaras, P. Śiroczki, *Note on the dimension of the Mycielskian of a graph*, **International journal of Pure and Applied Mathematics** 106(2) (2016), 677 – 688], v ktorej sa skúmajú odhady, resp. presné hodnoty dimenzie grafov získaných Mycielskeho konštrukciou z kružníc, stromov a kompletných grafov.

---

## BUDÚCNOSŤ A SMEROVANIE KOŠICKEJ ŠKOLY DISKRÉTNEJ MATEMATIKY

---

*Tomáš Madaras a Roman Soták*

Známa téza (o ktorej platnosti vo finančnej, športovej či akademickej sfére sa neustále vedú diskusie) tvrdí, že najlepším ukazovateľom budúcich výsledkov sú minulé výsledky. Aj keď medzi obidvomi časťami daného výroku existuje istá korelácia, výrok samotný nie je ani nutnou, ani postačujúcou podmienkou kvality budúcich výsledkov. Preto kontinuita Košickej školy diskkrétnej matematiky a jej ďalšieho smerovania musí byť – napriek úspechom, ktoré už dosiahla, resp. momentálne dosahuje – jej členmi nanovo a opakovane reflektovaná.

Naši školitelia nám kedysi, pred vyše tridsiatimi rokmi otvorili vchodovú bránu do „paláca diskkrétnej matematiky“ a spolu so svojimi kolegami „z partie“ nás sprevádzali po jeho sieňach a komnatách, ochotne nám ukazujúc všetky ich cennosti vrátane tých z „košického zlatého pokladu“. Neskôr nám dali svoju dôveru, aby sme spolu s nimi v tomto paláci prebývali, mali účasť na jeho krásach a rozširovali nadobudnuté umelecké zbierky. Úloha „ísť a konať podobne“, ktorá dnes stojí pred nami, nijako nie je jednoduchá, obzvlášť v dnešných časoch: pokles záujmu o štúdium matematiky na Slovensku (pravdepodobne korelujúci s globálnym nárastom obmedzenosti a príklonu k voľbe ľahších a ľúbivých riešení komplexných situácií v spoločnosti) a možnosti, ktoré chytrým absolventom ponúka korporátna sféra, hrajú (dočasne) proti nám

(na pohľad so silnými kartami). Matematici sú však predurčení hľadať a nachádzať riešenia problémov a v tomto smere bývajú optimistickí (v zmysle viery, že po čase vždy dôjdu aspoň k čiastkovej odpovedi a „pocit potom“ bude ostro lepší, ako pred nastolením problému). Navyše platí, že v tomto hľadanií nie sú sami a typicky dôjdu k riešeniam, keď spoja svoje sily. V tejto súvislosti nás v posledných rokoch veľmi oslovil príklad partnerských výskumných skupín (z Bratislavy, Plzne i Bordeaux), ktoré programovo a cieľavedomo zapájajú do svojich aktivít (napr. pravidelnou účasťou na stredoeurópskych konferenciách teórie grafov) svojich študentov pred-doktorandského štúdia, a tým si vytvárajú bázu pre svoj ďalší rozvoj; v blízkej budúcnosti plánujeme pre takéto zapojenie študentov, resp. spoločné vzdelávanie doktorandov, priamo získať finančnú podporu z grantových bilaterálnych i multilaterálnych schém. Je tiež potrebné zdôrazniť, že prídavné meno „Košická“ v charakterizácii našej školy diskkrétnej matematiky akcentuje jej celoregionálny rozmer a jej činnosť nijako nie je obmedzená len na pôdu Prírodovedeckej fakulty UPJŠ: významnú úlohu v nej plnia výskumné skupiny pôsobiace na Technickej univerzite; bude aj našou snahou prispieť k ich vedeckému rozvoju prostredníctvom pokračujúcich spoločných národných APVV-projektov, ako i personálnemu posilneniu odporúčaním a podporou mladých vedeckých pracovníkov, ktorí sa po dovŕšení doktorandského štúdia rozhodnú pokračovať v akademickej sfére.

Tradičné témy, ktoré boli v centre záujmu matematikov z košickej školy – globálna a lokálna štruktúra grafov (najmä planárnych, polyedrálnych, vnorených do plôch vyšších rodov, resp. grafov, ktoré sú im príbuzné z hľadiska geometricko-topologických vlastností ich reprezentácií) a ich farebnosť – sú aktuálne aj dnes; minulé i nedávne práce košických autorov z tejto oblasti každoročne zaznamenávajú nové ohlasy. Avšak, „*život je pohyb*“ (Aristoteles), preto je našou snahou na jednej strane aktívne si osvojiť a následne využiť vo svojom výskume v daných oblastiach nové metódy a dôkazové techniky (tu možno špecificky spomenúť kompresiu



entropie, kombinatorický Nullstellensatz-princíp, pravdepodobnostnú metódu, lineárnu a celočíselnú optimalizáciu, ale aj aktívne použitie výpočtovej techniky a systémov počítačovej algebry pri overovaní i návrhu hypotéz a protipríkladov k nim), ako aj pokúsiť sa „otvoriť dvere vnímania“ pre „lov dobrej vôle“ i v témach, ktoré priamo neboli integrálnou súčasťou histórie výskumu Košickej školy. Medzi takéto oblasti patrí, napr. problematika sociálnych, resp. komplexných sietí (tak z hľadiska „čistej“ matematiky, ako aj pre ich aplikácie), geometrické vlastnosti grafových reprezentácií či aplikácie grafov v nanofyzike. Posilniť svoju odvalu a „prekročiť prah nádeje“ možno aj voči väčším a veľkým otvoreným či populárnym problémom diskkrétnej matematiky (napokon, prvé a prostredné kroky k rozriešeniu známej Barnettovej hypotézy o hamiltonovskosti fullerénov sa udiali práve v prostredí Košickej školy). Úplne nové výzvy a perspektívy prináša masívny príchod generatívnej umelej inteligencie – napriek kontroverznosti a súčasným výhradám k jej použitiu vo vede a výučbe je skôr pravdepodobné, že sa v matematike zakrátko stane rovnako bežným a užitočne používaným nástrojom, ako kalkulačky alebo platforma WolframAlpha. Autori príspevku si už vyskúšali jej použitie pri zostavovaní cvičení (zahŕňajúcimi tiež úlohy dôkazového typu) z teórie grafov; na druhej strane, zdá sa, že k jej korektnému použitiu ako pomôcky pre návrh hypotéz je ešte veľmi dlhá cesta.

Medzinárodná spolupráca *Košickej školy diskkrétnej matematiky* bola jej organickou črtou už od čias vzniku. Aj keď v toku časov a zmien sa niektoré jej dlhé a pekné príbehy zavŕšili (napr. spolupráca s Technische Universität v Ilmenau, Nemecko), ich tóny doznievajú ešte dlho po spustení opony; na druhej strane, viaceré úspešné spolupráce z minulosti (s poľskými, maďarskými, či slovinskými grafovými skupinami) pokračujú dodnes a ich intenzita (a počet nových spoločných článkov) vzrastá (zrejme najväčšiu expanziu zaznamenáva spolupráca kolegov z Technickej univerzity s vedcami z indonézskejších, indických a pakistanských univerzít). Počas posledných rokov sa podarilo dosiahnuť nové spoločné výsled-

ky i s pracoviskami bez tradície predošlých kontaktov (Francúzsko, Belgicko) – dúfame, že tento trend bude pokračovať aj v budúcnosti.

Ak má kniha dobrý príbeh, nemusí byť nevyhnutne bestsellerom – spisovateľovi nezriedka stačí (popri pocite spokojnosti z jej napísania), že si nájde okruh čitateľov, ktorým sa zapáči. Radi sme boli a stále radi sme súčasťou úspešného príbehu Košickej školy diskkrétnej matematiky – a rovnako by sme radi dopriali zažívať tento pocit „byť súčasťou tohto príbehu“ aj našim nasledovníkom. Máme relatívne odôvodnenú nádej, že niektoré ich výsledky (i keď zatiaľ nevedno, či vo forme poznámky pod čiarou, odstavca alebo celej kapitoly) sa možno nájdu v tzv. „*Knihe*“ (angl. *„The Book“*), na ktorú často poukazoval Paul Erdős, a ktorá je neustálou inšpiráciou pri hľadaní a nachádzaní krásnej matematiky.

---

## OBRAZOVÁ PRÍLOHA

---

V tejto časti približujeme rôzne momenty z podujatí, ktoré boli organizované v rámci Košickej školy diskkrétnej matematiky. Prinášame fotografie z Česko-Slovenskej konferencie teórie grafov, zahraničných konferencií z teórie grafov, workshopov Cycles and Colourings, Konferencie slovenských matematikov, ale aj z rôznych podujatí, na ktorých sa členovia KŠDM zúčastnili. Fotografie zachytávajú aj vzácných pozvaných hostí na podujatia KŠDM.

Na fotografiách sú zachytené aj momenty výletov, vzájomných diskusií, ale aj spoločných riešení problémov. Pochádzajú zo súkromných zbierok účastníkov KŠDM a spolupracovníkov (vtedy uvádzame zdroj) alebo priamo ich fotografovali (vtedy uvádzame foto). Chceli by sme sa veľmi pekne poďakovať všetkým, ktorí nám ich poskytli pre lepšie zdokumentovanie vzácných a neopakovateľných chvíľ.

Ku akémukoľvek použitiu, preberaniu, šíreniu alebo ďalšiemu zverejňovaniu fotografií je potrebný súhlas editorov publikácie.



Obrázok 1: Účastníci Česko-Slovenskej konferencie (CSGT) Grafy 1995, Herľany. (Foto: Stanislav Jendroľ.)



Obrázok 2: Konferencia CSGT, 2003, Javorná (Česko). (Zdroj: Stanislav Jendroľ.)



Obrázok 3: Účastníci CSGT, Grafy 2019, Čingov. (Foto: Mária Maceková.)



Obrázok 4: Konferencia CSGT, Grafy 2019, Čingov. (Zľava: T. Madaras, Z. Ryjáček, M. Bača a P. Šugerek pri spievaní Hymny Teórie grafov.) (Zdroj: Zdeněk Ryjáček.)



Obrázok 5: Medzinárodný workshop Graph Labelings (IWOGL), Kalasalingam university, New Delhi, India, 2009. (Z KŠDM boli prítomní J. Ivančo a S. Jendroľ.) (Zdroj: Stanislav Jendroľ.)



Obrázok 6: Účastníci konferencie ICTCSDM 2014 v Chennai, India. (Z KŠDM boli prítomní M. Bača a A. Feňovčíková.) (Zdroj: Martin Bača.)



Obrázok 7: Profesor Tao-Ming Wang z Tunghai University, Taichung, Taiwan počas konferencie ICTCS-DM 2014 v Chennai, India. (Zľava: A. Feňovčíková, M. Bača, T.-M. Wang.) (Foto: Martin Bača.)



Obrázok 8: Účastníci konferencie IWGTITE 2018 VIT University, Chennai, India. (Uprostred prof. S. Arumugam (Kalasalingam University, Tamil Nadu, India), sprava prof. K. Kathiresan (Nadar Janaki Ammal University, Sivakasi, India), M. Bača a A. Feňovčíková.) (Foto: Martin Bača.)



Obrázok 9: Pracovné stretnutie s Profesorkou Indra Rajasingh na VIT University, Chennai, India v roku 2018. (Zľava: doktorandka profesorky Rajasingh, I. Rajasingh, A. Feňovčíková, M. Bača.) (Foto: Martin Bača.)



Obrázok 10: Medzinárodná konferencia Networks and Algorithms (15th GraphMasters), Polytechnic University, Xi'an, Čína, 2018. (Z KŠDM boli prítomní S. Jendroľ a R. Soťák.) (Zdroj: Stanislav Jendroľ.)





Obrázok 11: Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (Nemecko), workshop 0607 Algorithmic Graph Theory, 2006. (Z KŠDM bol prítomný M. Horňák.) (Zdroj: Mírko Horňák)



Obrázok 12: 17<sup>th</sup> C5 Graph Theory Workshop (Cycles, Colourings, Cliques, Claws and Closures), Kurort Rathen (Nemecko), 2013. (Z KŠDM boli prítomní M. Horňák a S. Jendroľ.) (Foto: Stanislav Jendroľ.)



Obrázok 13: S. Jendroľ s niekoľkými účastníkami the 4<sup>th</sup> Gdańsk Workshop on Graph Theory, Grańsk (Poľsko), 2016. (Zdroj: Stanislav Jendroľ.)



Obrázok 14: VIII. konferencia CCGT, Rytró, Poľsko, 2018. (Z KŠDM boli prítomní I. Fabrici, M. Horňák, S. Jendroľ a R. Soták.) (Zdroj: Stanislav Jendroľ.)



Obrázok 15: Workshop CXL Mikulov, Česko, 2018. (Foto: Mária Maceková.)



Obrázok 16: Workshop Colourings of Graph, Plzeň (Česko), 2022. (Zľava: B. Lidický (Česko), I. Choi (Južná Korea), M. Voigt (Nemecko), S. Jendroľ (Slovensko) a E. Cho (Južná Korea).) (Zdroj: Stanislav Jendroľ.)



Obrázok 17: Workshop Ilmenau-Košice, 2019. (Foto: Mária Maceková.)



Obrázok 18: Graph Coloring workshop, Kežmarok, 2023. (Foto: Mária Maceková.)



Obrázok 19: Profesor E.T. Baskoro (ITB Bandung, Indonézia) počas návštevy v Košiciach v roku 2003. (Zľava: S. Jendroľ, E. T. Baskoro.) (Foto: Martin Bača.)



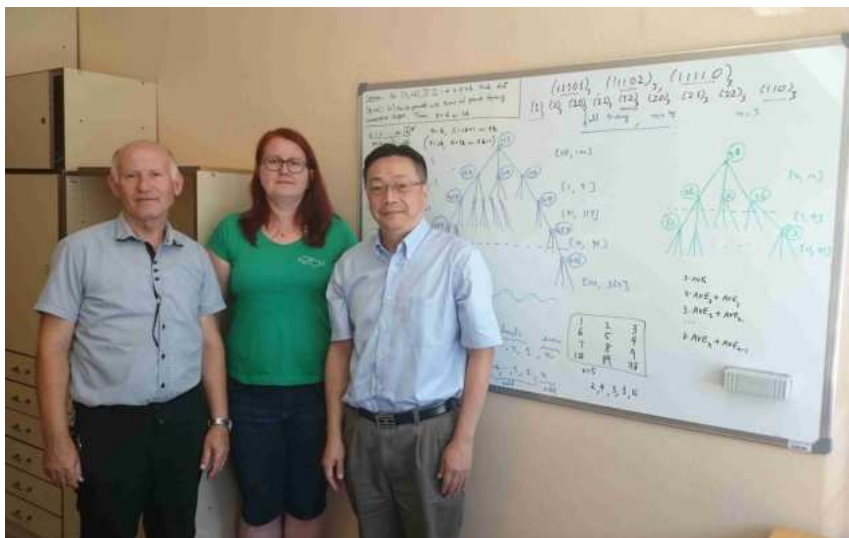
Obrázok 20: Japan Workshop on Graph Theory and Combinatorics 2005 - in honour of Hikoe Enomoto 60th birthday, Keio University, Yokohama. (Zľava: R. Gould (USA), J. Harant (Nemecko), S. Jendroľ, H. Enomoto (Japonsko).) (Zdroj: Stanislav Jendroľ.)



Obrázok 21: Konferencia slovenských matematikov, Jasná, 2011.  
(Zľava: S. Jendroľ, J. Nešetřil, J. Kratochvíl.) (Foto: Oliver Židek.)



Obrázok 22: Konferencia slovenských matematikov, Jasná, 2011.  
(Zľava: L. Bukovský, S. Jendroľ.) (Foto: Oliver Židek.)



Obrázok 23: Profesor Tao-Ming Wang z Tunghai University, Taichung, Taiwan počas návštevy Technickej univerzity v Košiciach v roku 2019. (Zľava: M. Bača, A. Feňovčíková, T.-M. Wang.) (Foto: Martin Bača.)



Obrázok 24: M. Horňák a R. Soták, Technische Universität Ilmenau, Nemecko, 1994. (Zdroj: Mírko Horňák)



Obrázok 25: Welcome party C&C 1997. (Zľava: M. Horňák, A. Bouchet, H. Enomoto.) (Foto: Stanislav Jendroľ.)



Obrázok 26: Na workshope C&C, Tatranská Štrba, 1997. (Zľava: H. Walther, A. Kennitz.) (Foto: Stanislav Jendroľ.)





Obrázok 27: Cycles and Colourings, 1998. (Zľava: M. Jacobson, M. Tkáč, J. Harant. (Foto: Geňa Hahn.))



Obrázok 28: D. Fronček a J. Kratochvíl (obaja Česko) na Cycles and Colourings, 1998. (Foto: Geňa Hahn.)



Obrázok 29: Enomoto na Cycles and Colourings, 1998. (Foto: Geňa Hahn.)



Obrázok 30: L. Lesniak na Cycles and Colourings, 1998. (Foto: Geňa Hahn.)



Obrázok 31: J. van den Heuvel a D. Sotteau, C&C, 1998. (Foto: Geňa Hahn.)



Obrázok 32: Výlet na Tomašovský výhľad pri 10. workshope C&C Pri spoločnej prechádzke, Čingov, 2001. (Zľava: S. Simič (Srbsko), E. Flandrin (Francúzsko), J. Ryan (Austrália), M. Miller (Austrália), Zs. Tuzs (Maďarsko).) (Foto: Stanislav Jendroľ.)



Obrázok 33: Workshop Cycles & Colourings, Tatranská Štrba, 2005. (Zľava: Martin Bača, profesor E. T. Baskoro (ITB Bandung, Indonézia) a Z. Ryjaček (Západočeská Univerzita v Plzni).) (Foto: Martin Bača.)



Obrázok 34: Spievajúc polnočnú pieseň, 2006. (Zľava: M. Woźniak, M. Bača, M. Horňák, A. Marczyk, M. Klešč.) (Foto: Arnfried Kemnitz)



Obrázok 35: Workshop Cycles & Colourings, Nový Smokovec, 2018.  
(Zľava: S. Jendroľ a Z. Ryjáček.) (Zdroj: Zdeněk Ryjáček.)



Obrázok 36: Prednáška Zdenka Ryjáčka na workshope C&C, Nový Smokovec, 2023. (Foto: Zdeněk Ryjáček.)



Obrázok 37: Neskorší obed po konferenčnom výlete v Slovenskom raji, C&C, 2001. (Foto: Joe Ryan.)



Obrázok 38: Školitelia a ich doktorandi, 2019. (Zdroj: Mária Maceková.)



Obrázok 39: Konferenčná fotografia workshopu C&C, 2018. (Foto: Mária Maceková.)



Obrázok 40: Konferenčná fotografia workshopu C&C, 2023. (Foto: Mária Maceková.)



Obrázok 41: S. Jendroľ pri poslednom kroku slávneho algoritmu „Face Coloring“, C&C, 2001. (Foto: Arnfried Kemnitz.)





Stanislav Jendroľ, Tomáš Madaras, Gabriel Semanišin,  
Štefan Tkačik

# **KOŠICKÁ ŠKOLA DISKRÉTNEJ MATEMATIKY 1968 – 2024**

2. diel

Rozsah: 292 strán  
Náklad: 300 ks  
Vydanie: prvé  
Rok vydania: 2024  
Vydavateľ: VERBUM - vydavateľstvo KU v Ružomberku  
Hrabovská cesta 5512/1A, 034 01 Ružomberok  
<http://ku.sk>, [verbum@ku.sk](mailto:verbum@ku.sk)

ISBN 978–80–561–1110–9